BIBLIOTECA

Sol 86-B
n. 208

33-4

CURSO MILITAR
DE
MATHEMATICAS.
TOMO SEGUNDO.
GEOMETRIA.

CURSO MILITAR
DE
MATHEMATICAS,
SOBRE
LAS PARTES DE ESTAS CIENCIAS,
pertenecientes al Arte de la Guerra, para el uſo de la Real Academia eſtablecida en el Quartèl de Guardias de Corps.

DEDICADO
AL REY NUESTRO SEÑOR
DON FERNANDO SEXTO,

POR MANOS DEL EXCmo. SEñOR DON CENON de Somodevilla, Marquès de la Enſenada, Cavallero de la Inſigne Orden del Toysòn de Oro, y de la Real de San Genaro, Comendador de Piedra-Buena, y de Peña de Martos en la de Calatrava, Cavallero Gran Cruz de la Religion de San Juan, del Conſejo de Eſtado de S. M. Secretario de Eſtado, y del Deſpacho Univerſal de Guerra, Marina, Indias, y Hacienda, Superintendente General de ella, y con Honores de Lugar-Theniente General del Almirantazgo General de Eſpaña, y de las Indias, &c. y Protectòr de la miſma Academia.

POR DON PEDRO PADILLA Y ARCOS, CAPITAN, è Ingeniero Ordinario de los Exercitos, Plazas, y Fronteras de S. M: y Directòr de la referida Academia.

DE ORDEN DE S. M.

EN MADRID, en la Imprenta de Antonio Marin, año de M.DCC.LIII.

APROBACION DE D. JORGE JUAN,

Comendador de Aliaga en el Orden de San Juan, Capitan de Navio de la Real Armada, y de la Compañia de Guardias Marinas, Socio correſpondiente de las Reales Academias de Ciencias de Parìs, de Berlìn, y de la Real Sociedad de Londres.

EXC.MO SEÑOR.

SEÑOR. He viſto, y leìdo de Orden de S. M. comunicada por V. E. el manuſcrito, que devuelvo adjunto, intitulado: *Tratado ſegundo de la Geometria Elementàr, ò de Euclides*, compueſto por Don Pedro Padilla: y en èl hallo un orden particular, que ſigue el Author, que es mucho mas primoroſo, y breve, que el que haſta aqui ſe ha ſeguido, incluyendo ſin embargo muchas propoſiciones muy utiles, que no ſe hallan en otros Tratados de la miſma eſpecie: y añadiendoſe à eſto, que no ſe vè demonſtracion,

que no eſtè perfectamente ſeguida, y ſegun las mas rigoroſas leyes de la Ciencia; juzgo que el dicho manuſcrito dado à la Prenſa, no ſolo ſerà util para la Academia de Guardias de Corps, ſino à todo el Reyno, y ſu Author digno de elogio.

Nueſtro Señor guarde à V. E. los muchos años, que la Monarquia ha de meneſter. Cadiz 26. de Diciembre de 1752.

EXCMO SEÑOR,

B. L. M. de V. E. ſu mas rendido, y ſeguro ſervidor,

Jorge Juan.

Excmo. Señor Marquès de la Enſenada.

TRA-

TRATADO II.

DE LA GEOMETRIA Elementar, ò de Euclides.

SI bien el termino, ò voz Griega, de *Geometria*, solo significa medida de tierra, por la aplicacion, y destino, que en su principio tuvieron sus reglas para la division, y compartimiento de las Heredades, segun nos testifican los Autores, amplificada despues, como al presente existe, y difundida su utilidad à todo aquello que concebimos baxo el termino de *extension, espacio, ò cantidad continua*, es una

de las Ciencias de mas generico, y mas noble objeto, la mas conducente para los uſos de la vida, y de ellos en eſpecial para los que ſe ofrecen en la Profeſsion Militar.

Sus propoſiciones, ò verdades, que eſtaban diſperſas, cuidò de coordinarlas, añadiendo otras muchas, el agudiſſimo Geometra *Euclides*, diſtinto del Philoſopho de eſte nombre, unos treſcientos años antes de la Venida de *Chriſto Señor nueſtro*, diſtribuyendolas con admirable orden en quince Libros, ò Elementos, que deſde entonces ſubſiſten, con el titulo de *Elementos de Euclides*, ò Geometria de Euclides, aunque los dos ultimos Libros comunmente ſe atribuyen à *Hypſicles* de Alexandria.

De ellos, los que conducen para nueſtro intento, ſon los ſeis primeros, que tratan de la Geometria de los *Pla-*

nos,

nos, y el once, y doce de los *Solidos*, omitidos los reſtantes, que ſolo ſe ocupan en averiguar algunas eſpecies de incomenſurables, y en la inſcripcion, y circunſcripcion de los Cuerpos regulares à la Eſphera, explicando antes las propriedades de los numeros para ello neceſſarias.

El orden de Euclides, muy plauſible para el eſtudio de todos ſus Elementos, es abſolutamente nocivo para el que de ellos quiere extractar las propoſiciones utiles en la practica, y mas ſi à continuacion de ellas ſe añaden ſus aplicaciones, como es natural, para ſuavizar de eſte modo lo deſabrido de las abſtracciones, que en la Theorica ſon preciſas, ſin ſuſpender, como ſe eſtila, tan utiles conſequencias, para nuevo tratado, con el nombre de *Geometria practica*, pues todo quanto es exequible ſobre el papel, debe ſer mirado por Geo-

metria eſpeculativa ; ſin embargo para ſatisfacer à los apaſsionados del orden de Euclides , ſe anota aqui al miſmo tiempo el numero , y Libro , à que cada propoſicion correſponde en Euclides , valiendonos en todo lo poſsible de las miſmas voces de ſus textos , atenta la recomendacion , que merecen por ſu ajuſtada propiedad , y frequencia , con que en los Libros Mathematicos ſe citan , à fin que ſe aprenda tambien de memoria el numero de las referidas propoſiciones, para la brevedad de las Demoſtraciones, è inteligencia de los Authores.

SECCIONES.

Seccion 1. *De los principios generales de la Geometria.*

Seccion 2. *De las principales propiedades de las Lineas , Angulos , Triangulos , y Paraleloſgramos.*

Sec-

Seccion 3. *De las principales propiedades del Circulo, y Figuras regulares.*

Seccion 4. *De la razon, y proporcion de las Figuras Planas.*

Seccion 5. *De las principales propiedades de los Planos en quanto à ſus Secciones, y Poſiciones.*

Seccion 6. *De los Sólidos.*

SEC-

SECCION I.

DE LOS PRINCIPIOS *fundamentales de la Geometria.*

DEFINICIONES.

DEFINICION I.

1 *Geometria* es Ciencia, que trata de la extenſion, eſpacio, ò cantidad continua.

SCHOLIO.

2 Tres eſpecies de extenſion abſtrae el entendimiento, y conſidera en la naturaleza; porque, ò contempla las propiedades de una coſa, por exemplo, *un dado de jugar*, en quanto à ſu largo, que llaman *Linea*, y es uno de ſus lados, ò en quanto à ſu largo, y ancho, que dicen *ſuperficie*, y es qualquiera de ſus caras, ò finalmente en quanto à ſu largo,

go, ancho, y profundo, que ſe denomina *Solido*, ò *Cuerpo*, y es todo el dado: y aunque, como ſe vè en eſte exemplo, la Linea no puede exiſtir ſin la ſuperficie, éſta ſin el ſólido, y éſte ſin que ſea de alguna materia; con todo, el entendimiento ſegrega, ſegun que le es permitido, unas coſas de otras, para averiguar ſeparadamente ſus propriedades. Baxo eſte ſupueſto, y que una Ciencia, quando ſe explica ordenada, debe ſer por ſus principios, preſcindiendo del modo, que ſe tuvo en inventarla, ſirvan à la Geometria de fundamentos los ſiguientes, comenzando deſde el punto, como origen que es de la cantidad continua.

DEFINICION II.

3 *Punto* es el que no tiene partes. Tal ſe debe conſiderar eſta ſeñal • ſi ſe quiere repreſente un punto.

DE-

DEFINICION III. (Fig. 1.)

4 Si el punto A ſe ſupone moverſe haſta otro punto B, la extenſion AB, por donde ſe imagina correr, ò fluìr, ſe dice *Linea.*

COROLARIO I. (Fig. 1.)

5 Por lo que *los extremos*, ò *terminos de la Linea* AB, *ſon los puntos* A y B.

COROLARIO II. (Fig. 1.)

6 *Y ſolo tiene longitud* AB, *pero ſin latitud*, pues ſu ancho es un punto, y eſte no tiene partes. (3)

DEFINICION IV. (Fig. 1.)

7 Si el punto A ſe ſupone moverſe por la extenſion mas breve, ò corta AB, la linea que forma, ſe dice *recta.*

DE-

DEFINICION V. (Fig. 1.)

8 Pero ſi ſe mueve por otra qualquier direccion AXB, ſe llama *linea curba.*

COROLARIO.

9 De que ſe infiere, que *la Linea recta entre dos puntos, es unica, pero las curbas pueden ſer infinitas.*

DEFINICION VI.

10 *Diſtancia* es la mas breve extenſion de un parage à otro, eſto es, una linea recta. (7)

DEFINICION VII. (Fig. 2.)

11 Si una Linea AB ſe mueve à lo largo de otra AC, la extenſion AB, CD, por donde corre, ſe dice *ſuperficie.*

CO-

COROLARIO I. (Fig. 2.)

12 Por lo que *los extremos de la ſuperficie* A B C D, *ſon lineas* A C, C D, D B, B A.

COROLARIO II. (Fig. 2.)

13 Y *ſolo tiene longitud* A C, y *latitud* A B, pero ſin grueſſo, pues eſte es un punto, el qual no tiene partes. (3)

DEFINICION VIII. (Fig. 2.)

14 Si la linea A B ſe mueve à lo largo de una recta A C, la ſuperficie que forma, ſe dice *Plana*, ò *Plano*.

DEFINICION IX.

15 Pero ſi ſe mueve por otra qualquier linea, ò direccion, la ſuperficie que forma, ſe llama *curba*.

COROLARIO. (Fig. 2.)

16 De lo que se sigue, que *la superficie plana entre unos extremos* A B, A C, C D, D B, *es unica, pero las curbas pueden ser infinitas.*

SCHOLIO.

17 Euclides principalmente trata de la superficie plana.

DEFINICION X. (Fig. 3.)

18 *Angulo plano*, es la mútua inclinacion de dos lineas C B, D B, que concurren en un mismo punto B.

DEFINICION XI. (Fig. 3.)

19 El punto B, se llama *Vertice* del ángulo, y las lineas B C, B D, que lo forman, *lados*, ò *piernas del ángulo.*

COROLARIO.

20 Conſiſtiendo el ángulo en la mayor, ó menor inclinacion de ſus lados, ſiempre ſerà el miſmo de qualquier longitud, que eſtos ſean.

SCHOLIO. (Fig. 3. y 4.)

21 Si el ángulo CBD, (Fig. 3.) ſe halláre ſolo, baſtarà nombrarlo con la letra B del Vertice; pero ſi huviere otros ángulos formados en el miſmo punto B, (Fig. 4.) ſerà conveniente, para evitar confuſion de notar el ángulo con tres letras, de las quales la de en medio indique el Vertice. Aſsi por el ángulo ABC, entendemos uno de los formados en el punto B, y cuyos lados ſean AB, BC. Tambien ſe ſuele denotar con una letra pequeña x, puеſta dentro del ángulo, que ſe quiere nombrar.

DEFINICION XII. (Fig. 5. 6. 7.)

22 Si las lineas, que forman el ángulo fueren rectas como A, (Fig. 5.) el ángulo se llama *rectilineo*; si curbas como B, (Fig. 6.) *curbilineo*; y si de recta, y curba como C, *mixtilineo*. (Fig. 7.)

SCHOLIO.

23 Euclides solo trata del ángulo rectilineo.

DEFINICION XIII. (Fig. 4.)

24 Si una recta CB, cayendo sobre otra AD, no se inclina mas de una parte, que de otra, cada uno de los angulos CBA, CBD, que forma, se llama *recto*, y la CB *perpendicular*, ò *normal* sobre AD.

DEFINICION XIV. (Fig.4.)

25 El ángulo ABO, mayor que el recto CBA, se llama *obtuso*; y el OBD, menor que el recto CBD, se dice *agudo*: Uno, y otro, à distincion del recto, se llaman angulos *obliquos*.

COROLARIO. (Fig.4.)

26 De que se colige, que *el ángulo recto* CBA *en el punto* B *de la recta* AB, *es unico; pero los angulos obtusos, y agudos pueden ser infinitos.*

DEFINICION XV.

27 *Figura* es una extension, ò espacio cerrado de uno, ò muchos terminos, extremos, ò lados.

DE-

DEFINICION XVI.

28 Si la Figura eſtà terminada de lineas rectas, ſe llama *rectilinea*; ſi de curbas, *curbilinea*; y ſi de rectas, y curbas, *mixtilinea*.

DEFINICION XVII. (Fig. 8.)

29 Si una recta A B, dà una reboluciòn entera al rededor de uno de ſus extremos A, la figura X, que reſulta, ſe dice *circulo*.

DEFINICION XVIII. (Fig. 8.)

30 La curba B B B deſcripta con el extremo B de la recta A B, y que es el extremo, ò termino del circulo, ſe llama *circunferencia*, *perimetro*, ò *periferia*: el punto fixo A *centro*; qualquier recta A B, tirada deſde el centro à la periferia, *radio*; y la recta B A B, compueſta de dos radios, ſe denomina *diametro*.

COROLARIO. (Fig. 8.)

31 *Todos los radios ſon iguales entre ſì*, pues ſon iguales à la miſma recta A B, que formò el circulo; *y aſsimiſmo ſon tambien iguales entre sì los diametros*, reſpecto que ſe componen de dos radios.

DEFINICION XIX. (Fig. 8.)

32 Qualquier parte B B de la circunferencia, ſe llama *arco*; y la recta tirada de un extremo à otro del arco, *cuerda*, ò *ſubtenſa.*

DEFINICION XX. (Fig. 8.)

33 El eſpacio mixtilineo BB, terminado del arco, y la cuerda, ſe dice *ſegmento de circulo*; y el eſpacio aſsimiſmo mixtilineo B A B, terminado de dos radios, y el arco, ſe llama *ſector de circulo.*

SCHO-

SCHOLIO.

34 En la Geometrìa de Euclides ſolo ſe trata de las propriedades del circulo, y de la linea recta.

DEFINICION XXI. (Fig. 9. 10. 11. 12.)

35 *Figuras trilateras*, ò *triangulos*, ſon las que eſtàn terminadas de tres lineas, como A: (Fig. 9.) *quadrilateras* las que eſtàn terminadas de quatro lados, como B; (Fig. 10.) *pentagono* la de cinco lados, como C; (Fig. 11.) *exagono* de ſeis lados, como D; (Fig. 12.) y generalmente *multilateras*, ò *poligonos* las que eſtàn terminadas de mas de quatro lados.

DEFINICION XXII. (Fig. 13. 14. 15.)

36 *Triangulo equilatero* es el que tiene ſus tres lados iguales, como A; (Fig. 13.) *Iſoſceles* el que tiene ſolo dos lados

iguales, como B; (Fig.14.) y *Escaleno* el que tiene sus tres lados desiguales, como C. (Fig.15.)

DEFINICION XXIII. (Fig.13.14.15.)

37 Si el triangulo tiene un ángulo recto, como C, (Fig.15.) se dice *rectangulo*; si tiene un ángulo obtuso, como B, (Fig.14.) se llama *obtusangulo*; y *acutangulo*, si tiene sus tres angulos agudos, como A. (Fig.13.)

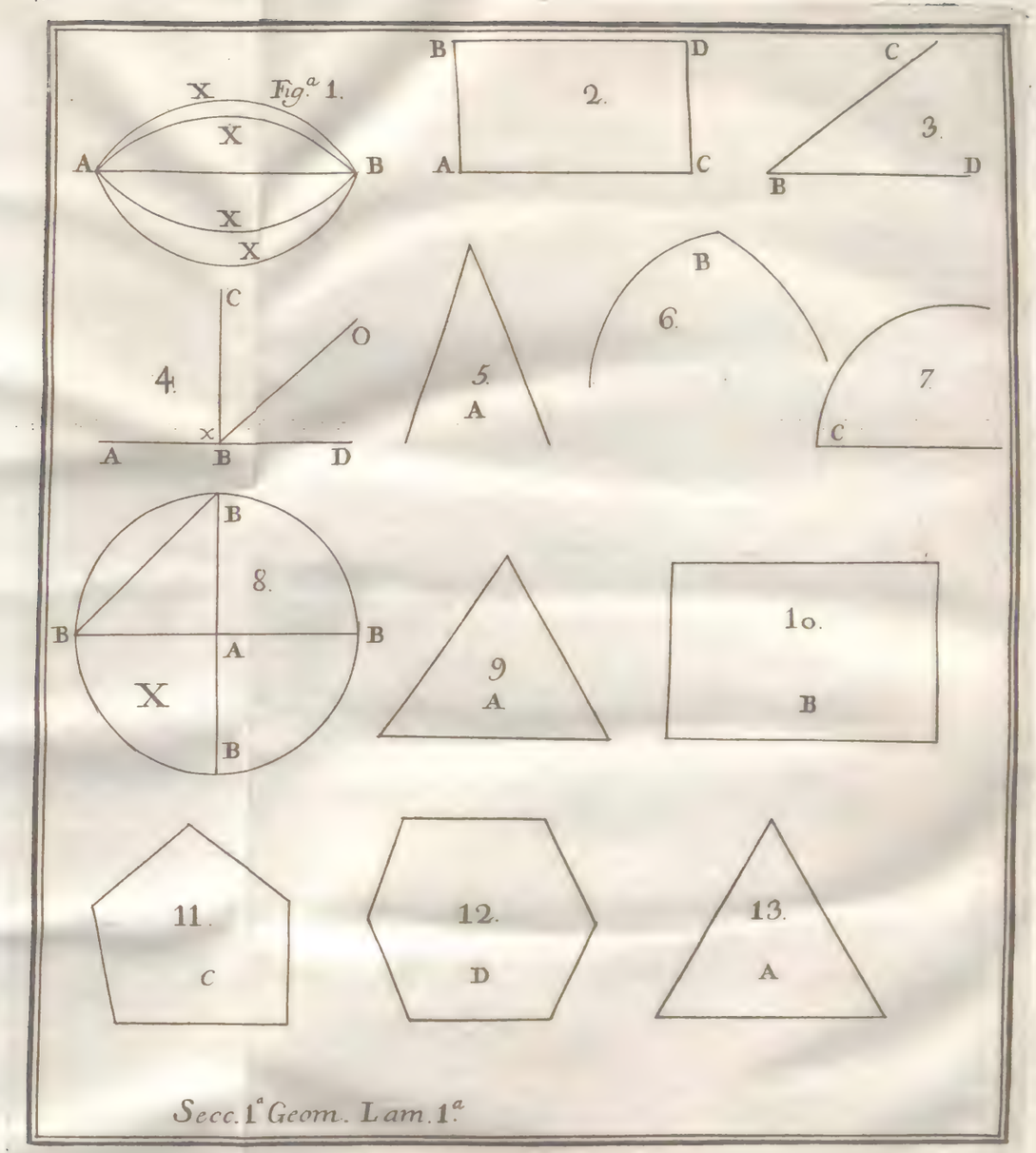
DEFINICION XXIV. (Fig.16.)

38 *Quadrado* es un quadrilatero A, cuyos quatro lados son iguales, y los angulos rectos.

DEFINICION XXV. (Fig.17.)

39 *Rectangulo*, ò *Quadrilongo* es un quadrilatero B, cuyos lados opuestos son iguales, y los angulos rectos.

DE-



Secc.1ª Geom. Lam.1ª

DEFINICION XXVI. (Fig.18.)

40 *Rhombo* es un quadrilatero C, cuyos lados ſon iguales, y ſus angulos obliquos.

DEFINICION XXVII. (Fig.19.)

41 *Rhomboide* es un quadrilatero D, cuyos lados opueſtos ſon iguales, y ſus angulos obliquos.

DEFINICION XXVIII. (Fig.20.)

42 Si ſe imagina, que la recta A B, ſe mueve ſiempre perpendicular ſobre B D; la recta B D, y la A C, que forma el punto A, ſe llaman *paralelas*.

COROLARIO I. (Fig.20.)

43 Diſtando ſiempre una recta de otra en toda la extenſion A B, *jamàs podràn concurrir, aunque al infinito ſe continùen.*

CO-

COROLARIO II. (Fig. 20.)

44 Las perpendiculares A B, terminadas entre dos paralelas, ſon iguales ; y ſi las perpendiculares terminadas entre dos lineas , fueren iguales, las tales lineas ſeràn paralelas.

DEFINICION XXIX. (Fig. 21.)

45 Si un quadrilatero A B C D eſtà terminado de lados paralelos, eſto es, que A B, ſea paralelo à C D, y A C à B D, ſe llama *Paralelogramo.*

DEFINICION XXX. (Fig. 22. y 23.)

46 Si ſolo los lados opueſtos A C, B D, fueren paralelos, ſe dice *Trapezoide*; (Fig. 22.) y ſi ni eſta circunſtancia tuvieren , como D, ſe llaman *Trapecios.* (Fig. 23.)

DE-

DEFINICION XXXI.

47 *Cosas totalmente iguales* se dicen aquellas, que sobrepuestas unas à otras, se ajustan, ò coinciden perfectamente en todas sus partes de lados, angulos, y superficie: esto es, son una misma cosa.

COROLARIO I.

48 Respecto de que la superficie plana entre unos extremos es unica, (16) *si los extremos de dos superficies planas coincidiessen, serán totalmente iguales.*

COROLARIO II.

49 *Los circulos serán iguales, si sus diametros, ò semidiametros son iguales, y desiguales, los que los tengan desiguales.*

AXIO-

AXIOMAS.

AXIOMA I.

50 *Las lineas rectas iguales ſobrepueſtas ſe ajuſtan.*

AXIOMA II.

51 *Los angulos rectilineos iguales ſobrepueſtos, por ſus vertices ſe ajuſtan.*

AXIOMA III.

52 *Todos los angulos rectos ſon iguales entre sì.*

AXIOMA IV.

53 *La ſeccion de dos lineas es un punto.*

AXIOMA V.

54 *Dos lineas rectas ſolo ſe pueden cortar en un punto.*

SCHO-

SCHOLIO.

55 Ademàs de eſtos Axiomas, ſe deberàn tener preſentes aqui los dados en la Arithmetica, adonde ſe podrà recurrir, quando ſe citen.

POSTULADOS.

POSTULADO I.

56 *Que de un punto à otro ſe pueda tirar una linea recta.* Executaſe eſto en la Práctica ſobre el papel con el inſtrumento comun de la Regla.

POSTULADO II.

57 *Que eſta recta ſe pueda prolongar arbitrariamente à una, y otra parte.*

POSTULADO III.

58 *Que con qualquier centro, y qualquier intervalo ſe pueda deſcribir un circulo.* Eſto ſe executa en la Práctica ſobre el papel con el Compàs ordinario de dos puntas, por lo que toda la Geometrìa de Euclides en la Práctica ſe reduce al Compàs, y la Regla. (34)

COROLARIO I. (Fig. 24.)

59 *Para tirar una recta igual à otra dada* M, *deſde un punto dado* A, con el intervalo de M deſde A, ſe deſcribirà un circulo, y qualquier radio ſuyo AC, ſerà igual à la dada. (31) *Es la propoſicion 2. del 1. de Euclides.*

COROLARIO II. (Fig. 25.)

60 *Para tomar de una recta dada* AB, *una parte igual à otra recta dada* CD, con el intervalo CD, haciendo centro en A, ſe ha-

harà un circulo, y ſu radio AE, ſerà igual à la CD. (31) *Es la 3. del 1. de Euclides.*

SCHOLIO.

61 Eſtos ſon los principios fundamentales para entrar en la Geometrìa: otros ſe iràn dando à medida, que los aſſumptos lo requieran.

SECCION II.

DE LAS PRINCIPALES propriedades de las Lineas, Angulos, Triangulos, y Paralelofgramos.

PROPOSICIONES.

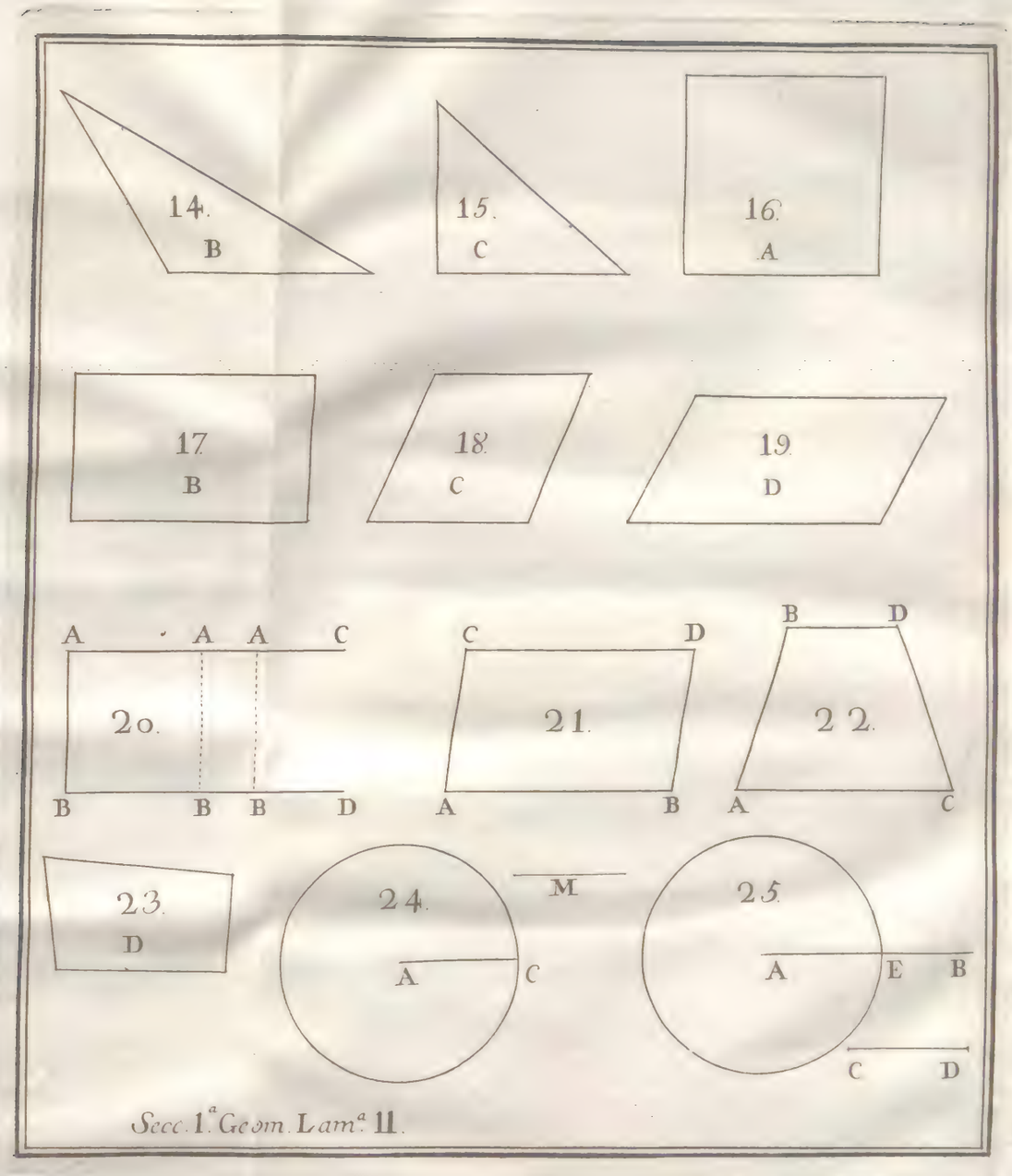
PROPOSICION I.

THEOREMA. (Fig. 26.)

62 *SI dos triangulos* ABC, *abc, tienen dos lados, del uno* AB, BC, *iguales à dos del otro ab, bc, cada uno à fu correfpondiente, y los angulos comprehendidos iguales, los triangulos feràn totalmente iguales.*

DEMONSTRACION.

Concibafe, que el triangulo *abc*, de tal



Secc. 1.ª Geom. Lam.ª 11.

tal ſuerte ſe ſobrepone al triangulo ABC, que el punto *b*, cayga ſobre el punto B, y la recta *b a* ſobre la recta B A. Entonces, por ſer iguales los lados *b a*, B A, y los angulos *a b c*, A B C, ſegun la ſupoſicion hecha, el punto *a* caerà ſobre el punto A, la recta *b c* ſobre la recta B C, y el punto *c* ſobre el punto C (50.y 51.): luego tambien la recta *a c*, coincidirà con la recta A C, (9) y todo el triangulo *a b c* ſe ajuſtarà perfectamente con el triangulo A B C (16); por conſiguiente ſon totalmente iguales, (47) que es lo que ſe havia de demoſtrar. (*Es la 4. del 1. de Euclides.*)

PROPOSICION II.

THEOREMA. (Fig. 27.)

63 *En el triangulo Iſoſceles* A B C, *los angulos* A, C, *ſobre la Baſe ſon iguales.*

DEMONSTRACION.

Supongaſe, que la recta BD divide el angulo B, en dos partes iguales, con lo que los triangulos ABD, DBC, tendràn AB=CB, (36) BD, comun; los angulos en B comprehendidos iguales: luego ſeràn totalmente iguales (62) por conſiguiente el angulo A, igual al angulo C (47) que es, &c. (*Es la 5. del 1. de Euclides.*)

PROPOSICION III.

THEOREMA. (Fig. 28.)

Si un triangulo ABC *tiene los angulos* A, C *ſobre la V aſe iguales, ſerà Iſoſceles, eſto es,* AB *ſerà igual à* BC. (36)

DEMONSTRACION.

Porque ſi no lo fueren, ſuponga-

ſe

ſe AB menor que CB, y aſsi corteſe CD, igual à AB, (60) y tireſe AD. (56) Los triangulos ABC, ADC, tienen ſegun eſto el lado AC comun : AB igual à CD, los angulos comprehendidos BAC, BCA por ſupoſicion iguales; luego ſon totalmente iguales, (62) que es impoſsible, porque el uno es parte del otro (39. *Arith.*) ; luego tambien es impoſsible, que el lado AB dexe de ſer igual al lado CB, que es, &c. (*Es la 6. del 1. de Eucl.*)

COROLARIO I.

65 *El triangulo equilatero es equiangulo, eſto es, tiene ſus tres angulos iguales.* (63)

COROLARIO II.

66 *El triangulo equiangulo es equilatero.* (64)

PROPOSICION IV.

THEOREMA. (Fig. 29.)

67 *Si dos triangulos* ABC, *abc tienen los tres lados del uno iguales à los tres del otro, cada uno à ſu correſpondiente, ſeràn totalmente iguales.*

DEMONSTRACION.

Imagineſe que el triangulo *abc*, de tal ſuerte ſe ſobrepone al triangulo ABC, que el punto *a* cayga ſobre el punto A; la recta *ac* ſobre la recta AC, y el punto *b* à la parte opueſta del punto B; con lo que por ſer iguales *ac*, AC, el punto *c* caerà ſobre el punto C (50). Tireſe la recta B*b*, (56) que en la figura X caerà dentro de los triangulos, y en la figura Z fuera.

Por quanto en el triangulo BA*b*, los la-

lados AB, A*b* ſe ſuponen iguales, los angulos AB*b*, A*b*B ſeràn iguales (63); y tambien porque en el triangulo BC*b* los lados BC, C*b*, ſe ſuponen iguales, los angulos *b*B*c*, B*b*C lo ſeràn entre sì (63); luego en la figura X la ſuma de AB*b* + *b*BC ſerà igual à la ſuma de A*b*B + B*b*C (29. *Arith.*): y en la figura Z la reſta de *b*BC — *b*BA ſerà igual à la reſta de B*b*C — B*b*A (30. *Arith.*); eſto es, que los angulos ABC, A*bc* ſeràn iguales; y teniendo por ſupoſicion iguales los lados, que los comprehenden, eſto es, AB, BC iguales à A*b*, *b*C, los triangulos ABC, A*b*C ſeràn totalmente iguales (62); que &c. (*Es la* 8. *del* 1. *Eucl.*)

PROPOSICION V.

THEOREMA. (Fig. 30.)

68 *Si una recta* AB *cae ſobre otra* CD,

formarà con ella, ò dos angulos rectos, ò iguales à dos rectos.

DEMONSTRACION.

Si la recta AB ſe ſupone perpendicular ſobre CD, los angulos ABC, ABD, ſeràn rectos (24); pero ſi no lo fueſſe, como FB, formarà el angulo CBF obtuſo, y el angulo FBD agudo (25); ambos componen los dos rectos CBA, DBA: luego ſeràn iguales à ellos. (39. *Arith.*) Que es, &c. (*Es la* 13. 1. *Eucl.*)

COROLARIO I.

69 Por la miſma razon *todos los angulos formados en un punto de una recta, ſon iguales à dos angulos rectos.*

COROLARIO II.

70 Aſsimiſmo *todos los angulos for-*

ma-

mados en un punto à una, y otra parte de una recta, ſon iguales à quatro angulos rectos.

PROPOSICION VI.

THEOREMA. (Fig. 31.)

71 *Si dos rectas* AB, CD *ſe cortan los angulos x, z, verticales, ù opueſtos por el Vertice, ſon iguales.*

DEMONSTRACION.

Los angulos *x*, *o* ſon iguales à dos rectos; (68) tambien lo ſon los angulos *o*, *z* (68): luego quitando de ambas partes el comun *o*, quedarà el angulo *x* igual al angulo *z* (30. *Arith.*); que es, &c. (*Es la* 15. 1. *Eucl.*)

PROPOSICION VII.

THEOREMA. (Fig. 32. y 33.)

72 *En todo triangulo* ABC *prolongado uno de ſus lados* AC, *el angulo externo* BCD, *es mayor que qualquiera de los internos opueſtos* B.

DEMONSTRACION. (Fig. 32.)

Supongaſe BC dividida en O en dos partes iguales, tireſe la AO prolongada de ſuerte, que AO ſea igual à OF, y tireſe FC.

Los triangulos AOB, FOC tienen los lados BO, OC, iguales; AO, igual OF, y los angulos Verticales en O iguales (71): luego ſon totalmente iguales (62), por conſiguiente el angulo, OCF ſerà igual ABC (47); pero BCD es mayor que BCF: luego tambien ſerà mayor que el angulo opueſto B. (28. *Arith.*)

Pa-

Para demoſtrar, (Fig. 33.) que el angulo externo BCD, es mayor tambien, que el angulo opueſto BAC; prolongueſe el lado BC, haſta Z, y dividido el lado AC por medio en M; tirada la BM, y prolongada de fuerte, que MN ſea igual BM, ſe demoſtrarà del miſmo modo, que los triangulos AMB, MNC, ſon totalmente iguales (62): luego el angulo BAC=MCN; (47) pero MCN es menor que MCZ=BCD por vertical: (71) luego BCD mayor que BAC. (28. *Arith.*) Que es, &c. (*Es la* 16. 1. *de Eucl.*)

COROLARIO I. (Fig. 32. y 33.)

73 Por quanto los angulos ACB, BCD, ſon iguales à dos rectos (68), y que qualquiera de los angulos A, B es menor que el angulo BCD: (72) el angulo ACB con qualquiera de los otros, ſerà menor que dos rectos; de fuerte, que *en todo triangulo* ABC *dos qualeſquiera angulos* A, y C,

y C, *tomados juntos, ſon menores que dos rectos.* (17. 1. *Eucl.*)

COROLARIO II. (Fig. 34.)

74 *Si de los extremos* AC *de una recta, ſalen otras dos* AB, CB, *formando dos angulos* A, *y* C *menores que dos rectos, las tales rectas concurriràn ácia aquella parte* B; *eſto es, formaràn un triangulo* ABC.

PROPOSICION VIII.

THEOREMA. (Fig. 35.)

75 *En todo triangulo* ABC *el mayor lado* AC *ſe opone al mayor angulo* B.

DEMONSTRACION.

El ſentido de la propoſicion es, que por ſer el lado AC mayor que el lado AB, el angulo B, ſerà mayor que el angulo C.

Cor-

Cortese AD, igual, AB, (60) y tirese BD. Y por quanto el triangulo BAD resulta Isosceles (36), los angulos ADB, ABD serán iguales (63); pero ADB por externo, es mayor que C: (72) luego tambien será mayor que C el angulo ABD (28. *Arith.*), y mucho mas lo será el angulo ABC, que es, &c. (*Es la* 18. 1. *Euclid.*)

PROPOSICION IX.

THEOREMA. (Fig. 35.)

76 *En todo triangulo* ABC, *el mayor angulo* B, *se opone al mayor lado* AC.

DEMONSTRACION.

El sentido de la proposicion es, que por ser el angulo B mayor que el angulo C, el lado AC será mayor que el lado AB.

Por-

Porque ſi no es mayor, ò ſerà igual, ò menor (2. *Pr. Not.*): ſi es igual, los lados AB, AC ſeràn iguales (64), contra lo ſupueſto; ſi es menor, entonces el lado AB ſerà mayor que AC (75), que es aſsimiſmo contra lo ſupueſto: luego es mayor; que es, &c. (*Es la* 19. *del lib.* 1. *Euclid.*)

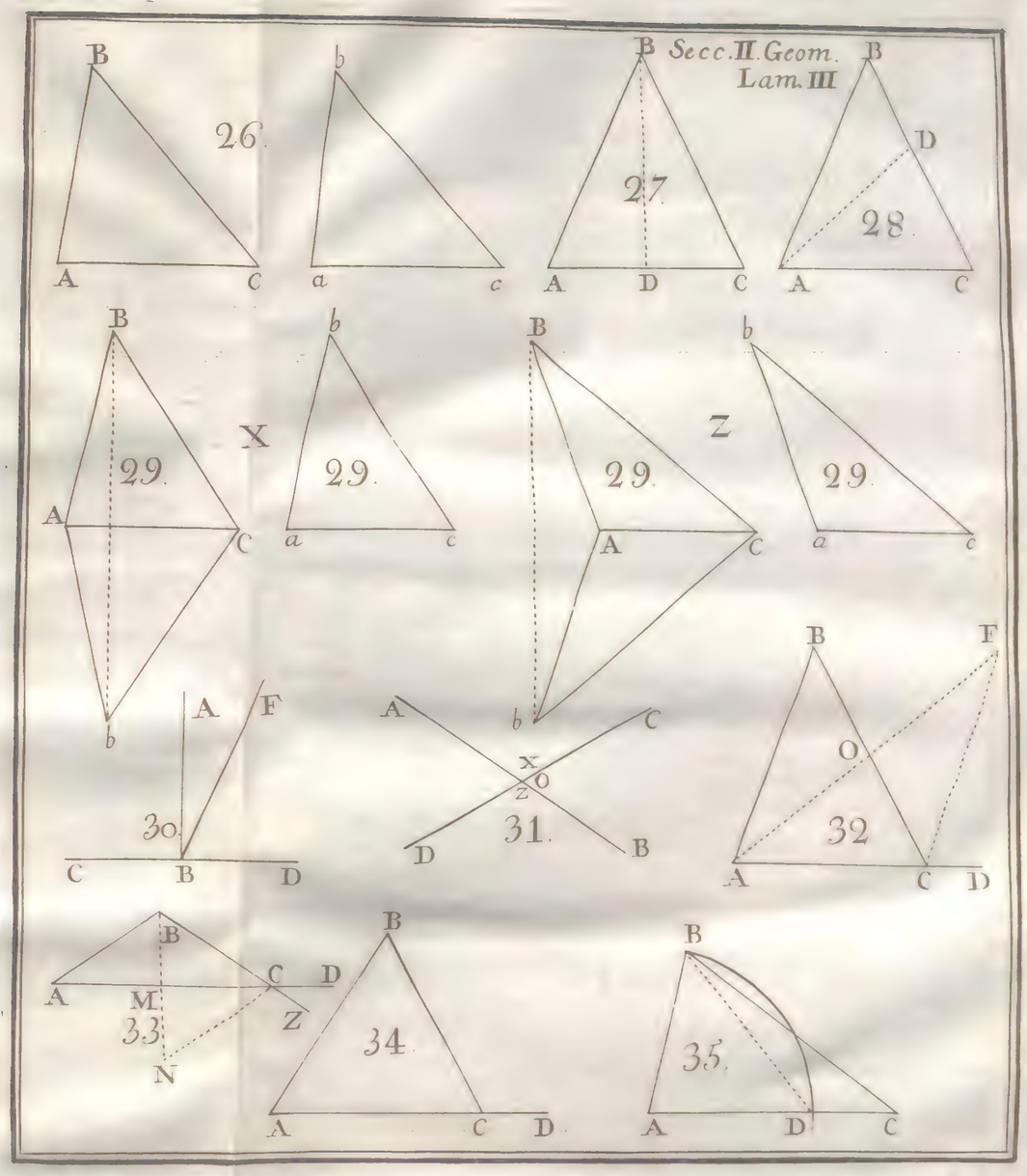
PROPOSICION X.

THEOREMA. (Fig. 36.)

77 *Si dos triangulos* ABC, *abc tienen dos lados* AB, BC, *del uno iguales à dos del otro ab, bc, el que tuviere mayor angulo, comprehendido* B, *tendrà mayor Vaſe, eſto es, que* AC, *ſerà mayor que ac.*

DEMONSTRACION.

Supongaſe el triangulo *abc* aplicado ſobre la recta AB, y tireſe la Cc. por quan-


Secc. II. Geom.
Lam. III
26.
27.
28.
29.
X
29.
Z
29.
29.
30.
31.
32.
33.
34.
35.

quanto el triangulo CB*c* es Iſoſceles, pues *c*B igual CB por ſupoſicion, (36) los angulos B*c*C, BC*c* ſeràn iguales (63); pero el angulo BC*c* es mayor que el angulo AC*c*: luego tambien ſerà mayor el angulo B*c*C (28.*Arith.*): el angulo A*c*C es mayor que B*c*C, luego ſerà mucho mayor que AC*c* (28.*Arith.*): Por conſiguiente en el triangulo AC*c* el lado AC, que ſe opone al mayor angulo c, ſerà mayor que el lado A*c*, opueſto al menor angulo AC*c*, (76) que es, &c. (*Es la* 24. 1 *Eucl.*)

PROPOSICION XI.

THEOREMA. (Fig. 37.)

78 *Si dos triangulos* ABC, *abc tienen dos lados, del uno* AB, BC *iguales à dos del otro ab, bc, el que tuviere mayor vaſe* AC, *tendrà mayor angulo opueſto* B.

DE-

DEMONSTRACION.

Porque ſi el angulo B no es mayor, que el angulo *b*, ò ſerà igual, ò menor; (2. *Pr. Not.*) ſi es igual, los triangulos ABC, *abc*, ſeràn totalmente iguales (62): por conſiguiente AC, igual *ac*, (47) que es contra lo ſupueſto: ſi es menor, entonces la Vaſe *ac*, ſerà mayor que AC, (77) que es aſsimiſmo contra lo ſupueſto: luego debe ſer mayor; que es, &c. (*Es la* 25. 1. *Eucl.*)

PROPOSICION XII.

THEOREMA. (Fig. 38.)

79 *Si dos triangulos* ABC, *abc tienen dos angulos del uno iguales à dos del otro, y un lado à un lado, cada coſa à ſu correſpondiente, los triangulos ſeràn totalmente iguales.*

DE-

DEMONSTRACION.

Primero: Sea AC igual *ac*, y los angulos adyacentes A y C iguales à los angulos *a*, y *c*: Imagineſe, que el triangulo *abc* de tal ſuerte ſe ſobrepone al triangulo ABC, que el punto *a* cayga ſobre el punto A, y el lado *ac* ſobre el lado AC, los quales por ſer iguales, como tambien los angulos A, y *a*, Cy*c*, el punto *c* caerà ſobre el punto C: el lado *ab* ſobre el lado AB, y el lado *cb* ſobre CB: (50. 51.) por conſiguiente el punto *b* caerà ſobre el punto B, donde ſe cortan los lados AB, CB, (54) y los triangulos coincidiràn uno con otro: (16) luego ſon totalmente iguales. (47)

Segundo: Sea AC$=$*ac*; el angulo A$=$*a*; y el angulo B$=$*b*. Supongaſe del miſmo modo, que el triangulo *abc* de tal ſuerte ſe ſobrepone al triangulo ABC, que el punto *a* cayga ſobre el punto

to A, y el lado *ac* ſobre AC, que por ſer iguales, el punto C caerà ſobre el punto C; (50) y por ſuponerſe iguales los angulos *a*, y A, el lado *ab* caerà ſobre AB. (51) Si el punto *b* ſe concede caer ſobre el punto B, es cierto, que los triangulos ſeràn totalmente iguales, (47) pues tambien *cb*, caeria ſobre CB; pero ſi ſe negaſſe ſuponiendo caer en b, entonces el angulo externo A*b*C, ſerìa igual à ſu interno opueſto ABC, reſpecto que en la propoſicion ſe ſuponen iguales, lo que es contra la 16. del 1. (*n.* 72.) luego ſolo debe caer en B, en cuyo caſo, como queda dicho, los triangulos ſeràn totalmente iguales; que es, &c. (*Es la 26. 1. Eucl.*)

PROPOSICION XIII.

THEOREMA. (Fig. 39.)

80 *Si à dos rectas* AB, CD, *les corta otra*

otra EF, *formando los angulos alternos iguales* AGH, DHG, *las rectas ſeràn paralelas.*

DEMONSTRACION.

Si no fueren paralelas, concurriràn (43) formando el triangulo GMH, cuyo angulo externo AGH ſerà mayor, que el interno opueſto DHG (72), contra lo ſupueſto : luego no podràn concurrir: luego ſeràn paralelas (43); que es, &c. (*Es la* 27. 1. *Eucl.*)

PROPOSICION XIV.

THEOREMA. (Fig. 39.)

81 *Si à dos rectas* AB, CD, *les corta otra* EF, *formando el angulo externo* FGB *igual à ſu interno* GHD *de la miſma parte, ò los dos internos de una miſma parte* GHD, HGB *iguales à dos rectos, las rectas ſeràn paralelas.*

DEMONSTRACION.

Si no fueſſen paralelas, concurriràn en M (43), formando el triangulo GMH, que en el primer caſo tendria el angulo externo FGB mayor, que ſu interno GHD (72), y en el ſegundo caſo los dos angulos BGH, GHD ſerìan menores que dos rectos (73), uno, y otro contra lo ſupueſto: luego en ningun caſo las rectas concurriràn: por conſiguiente ſeràn paralelas (43); que es, &c. (*Es la* 28. 1. *Euclid.*)

PROPOSICION XV.

THEOREMA. (Fig. 39.)

82 *Si à dos rectas* AB, CD *paralelas, les corta otra* EF, *formarà los angulos alternos* AGH, GHD *iguales; el externo* FGB *igual à ſu interno* GHD, *y los dos internos* BGH, DHG, *iguales à dos rectos.*

DE-

DEMONSTRACION.

1. Porque ſi el angulo AGH ſe ſupone mayor que GHD; añadido à ambos el angulo BGH: los dos AGH + BGH ſeràn mayores, que GHD + BGH (31. *Arith.*): pero AGH + BGH ſon iguales à dos rectos (68): luego GHD + BGH ſeràn menores, que dos rectos (28. *Arith.*): por conſiguiente las rectas GB, HD concurriràn (74), que es impoſsible, pues ſe ſuponen paralelas (43). Del miſmo modo ſe probarà, que el angulo AGH no es menor, que el angulo GHD: luego ſon iguales.

2. Los angulos FGB, AGH por Verticales ſon iguales (71); pero AGH, ſegun lo demoſtrado, es igual GHD: luego FGB ſerà igual GHD. (28. *Arith.*)

3. Los angulos AGH, + BGH ſon iguales à dos rectos (68); pero AGH, ſe-

gun lo demoſtrado, es igual GHD: luego BGH + GHD ſeràn iguales à dos rectos; que es, &c. (*Es la 29. 1. Eucl.*)

PROPOSICION XVI.

THEOREMA. (*Fig.40.*)

83 *Las rectas* AB, CD *paralelas à otra* EF, *ſon paralelas entre sì.*

DEMONSTRACION.

Porque tirada la GH, el angulo AKG, es igual al angulo ELG (82); y por la miſma razon el angulo ELG es igual CMG: luego AKG igual CMG (28. *Arith.*): luego AB, CD ſon paralelas. (81) (*Es la 30. 1. Eucl.*)

PRO-

PROPOSICION XVII.

THEOREMA. (*Fig.*41.)

84 *En todo triangulo* ABC, *ſus tres angulos tomados juntos, ſon iguales à dos rectos, y prolongando uno de ſus lados* AC, *el angulo externo* BCD, *es igual à los dos internos opueſtos* BAC, CBA.

DEMONSTRACION.

Supongaſe EF paralela à AC por el Vertice B, con lo que el angulo x ſerà igual al angulo m por alternos (82), y por alternos lo ſeràn tambien z, n; ſi à ambas partes añadimos el angulo y, ſe tendrà $x + y + z = m + y + n$ (29. *Arith.*); pero x, y, z ſon iguales à dos rectos (69); luego tambien lo ſeràn, $m + y + n$. (28. *Arith.*)

Los angulos $n + o$ ſon iguales à dos

rectos (68); pero $m + y + n$ ſon iguales à dos rectos; luego ſi ſe quita el comun n, quedarà el angulo $o = y + m$. (30. *Arith.*) (*Es la* 32. 1. *Eucl.*)

COROLARIO I.

85 En qualquier triangulo, ſi uno de ſus angulos fuere recto, los demàs deben ſer agudos, y valen tanto como otro recto.

COROLARIO II.

86 Por lo miſmo un triangulo no puede tener dos angulos rectos, ni menos dos angulos obtuſos.

COROLARIO III.

87 A los dos lados iguales de un triangulo Iſoſceles, ſe oponen ſiempre angulos agudos.

COROLARIO IV.

88 Si dos angulos de un triangulo fueren iguales à los dos de otro, tambien el tercero ſerà igual al tercero ; pues todos tres en uno, y otro triangulo ſon iguales à dos rectos.

COROLARIO V.

89 De un punto ſolo puede ſalir una perpendicular ſobre una recta, pues de otra ſuerte ſe podria diſponer un triangulo con dos angulos rectos, que es impoſsible. (86)

COROLARIO VI.

90 La perpendicular es la linea mas breve de las que de un punto pueden ſalir ſobre una recta, pues qualquiera de eſtas ſe opone à un angulo recto, y la perpendicular à un angulo agudo. (76)

COROLARIO. VII.

91 Por conſiguiente la diſtancia de un punto haſta una recta, ſe medirà por la perpendicular, tirada à ella deſde el referido punto. (10)

PROPOSICION XVIII.

THEOREMA (*Fig.*42.)

92 *Si dos triangulos* ABC, *abc tienen dos lados* AB, CD *del uno, iguales à dos del otro ac, cb, y de los angulos opueſtos fueren iguales los angulos* A, *a, y los* B, *y b ambos agudos, ò ambos obtuſos, los triangulos ſeràn totalmente iguales.*

DEMONSTRACION.

Sean agudos los angulos B, y *b*, y el angulo C mayor que *c*, por lo que ſi ſe ſupone el angulo DCA = *c*: los trian-

gu-

gulos DCA, *bca* ſeràn totalmente iguales (29) : luego el angulo ADC = *b*, y el lado DC = *bc* (47) ; pero *bc* por ſupoſicion es = BC : luego BC = DC (28. *Arith.*) , por conſiguiente los angulos B, y CDB ſeràn iguales (63) : el angulo B = BDC ſe ſupone agudo: luego el angulo ADC = *b* ſerà obtuſo (68) , que es contra lo ſupueſto , haviendoſe ſentado ſer el angulo *b* agudo.

Siendo obtuſos los angulos B, y *b*, ſe prueba del miſmo modo , que los angulos BDC, CBD ſon iguales , y que ſuponiendoſe el angulo obtuſo , tambien lo ſerà el angulo BDC, que es impoſsible (86) : luego en una , y otra ſupoſicion el angulo *acb* no puede ſer menor, que ACB, ni tampoco mayor , pues ſubſiſte la miſma demonſtracion : luego ſon iguales (2. *Pr. Not.*) , en cuyo caſo los triangulos ACB, *acb* ſeràn totalmente iguales (79) ; que es, &c.

CO-

COROLARIO. (Fig.43.)

93 *Si dos triangulos rectangulos* ABC, *abc tienen qualeſquiera dos lados* AC, CB *iguales à ſus correſpondientes ac, cb, ſeràn totalmente iguales*, pues ademàs de tener los angulos A, y *a* iguales por rectos, los angulos B, y *b* ſon ambos agudos. (85)

PROPOSICION XIX.

THEOREMA. (*Fig.*44.)

94 *Si à dos rectas* AB, CD *iguales, y paralelas las unen otras dos* AC, BD, *ſeràn tambien iguales, y paralelas.*

DEMONSTRACION.

Tireſe la BC, y por quanto AB, y CD ſon paralelas, los angulos *x*, *z* ſeràn iguales (82), teniendo ademàs de eſto los

los triangulos ABC, BCD los lados AB, CD iguales por ſupoſicion CB +, comun ſeràn totalmente iguales (62):luego AC = BD (47); y ſiendo en conſequencia de eſto los angulos alternos *m* = *n* (47), las rectas AC, BD ſeràn paralelas (81); que es,&c. (*Es la* 33. 1.*Eucl.*)

PROPOSICION XX.

THEOREMA. (*Fig.*44.)

95 *En todo paralelogramo* ABCD, *los lados, y angulos opueſtos ſon iguales, y la recta* CB *tirada de un angulo à otro opueſto, que ſe dice diagonal, lo divide en dos partes iguales.*

DEMONSTRACION.

Por quanto AB, CD ſe ſuponen paralelas, como tambien AC, BD (45), los angulos alternos *x*, *z*, y

aſsimiſmo *m*, *n* ſeràn iguales (82); y ſiendo BC lado comun para los triangulos ABC, BCD, ſeràn totalmente iguales (79): luego AC=BD, AB=CD (47); que es, &c. (*Es la* 34. 1. *Eucl.*)

COROLARIO. (Fig. 44.)

96 Reſpecto de que ſi en un quadrado, quadrilongo, Rhombo, ù Rhomboyde ſe tira una diagonal, divide el quadrilatero en dos triangulos totalmente iguales (79), como es facil perſuadirſe de ello, atendiendo à las Definiciones (38. 39. 40. 41.) reſultaràn los angulos *x*, *z* iguales, como tambien *m*, *n* (47): luego CD, AB ſon paralelas (81), y aſsimiſmo AC, BD; de ſuerte, que qualquiera de las referidas figuras es un paralelogramo. (45)

PROPOSICION XXI.

THEOREMA. (*Fig.*45.)

97 *Los paralelofgramos* A B C D, CDEF, *que tienen una miſma Vaſe* CD, *y eſtàn entre unas miſmas paralelas* CD, AF, *ſon iguales.*

DEMONSTRACION.

Por ſer paralelas AC, BD, los angulos CAF, DBF ſeràn iguales (82); y aſsimiſmo, por ſer paralelas EC, FD, los angulos AEC, AFD ſeràn iguales: luego los triangulos ACE, BDF tienen los angulos en A, y en B, como en E, y en F iguales, el lado AC=BD (95); por conſiguiente ſon totalmente iguales (79); ſi de ambas partes ſe quita la comun EBG, quedarà el trapecio ABGC igual al trapecio GEFD (30. *Arith.*); y ſi à eſtos ſe añade el triangulo CGD, reſultarà el paralelo-

lelogramo AD igual al paralelogramo CF (29. *Arith.*) ; que es , &c. (*Es la* 35. 1. *Eucl.*)

COROLARIO (Fig.46.)

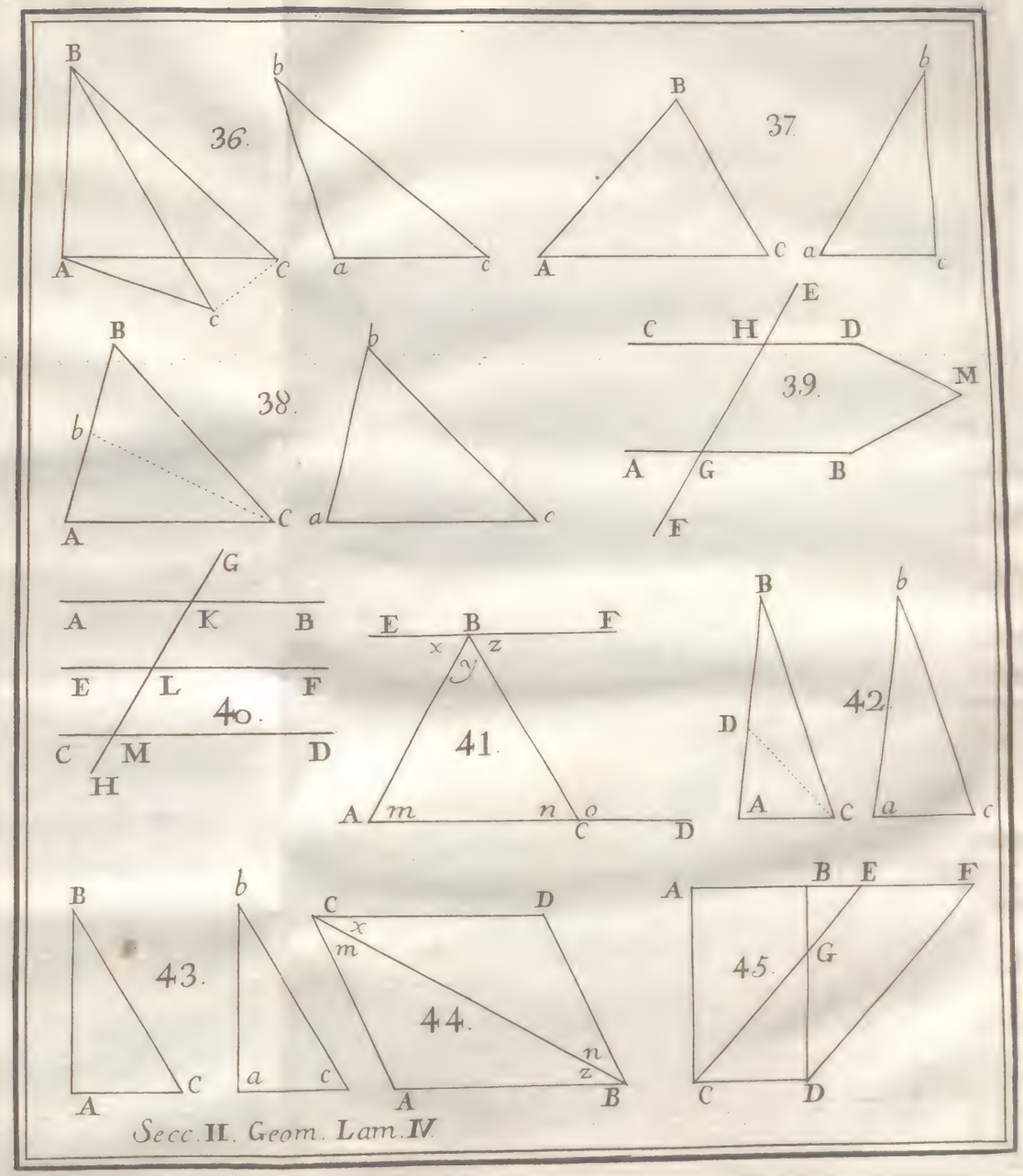
98 *Los paralelosgramos* AD, EH, *que tienen iguales Vases* AB, EF, *y estàn entre unas misмas paralelas* AF, GH, *son iguales* ; pues tiradas las AL, BH, se prueba , que el paralelogramo AH, y el paralelogramo DA son iguales , assi como los paralelosgramos HE, HA (97) : luego HE , DA seràn iguales entre sì. (28. *Arith.*) (*Es la* 36. 1. *Eucl.*)

PROPOSICION XXII.

THEOREMA. (*Fig.*47.)

99 *Los triangulos* ABC, ADC, *que tienen una misма Vase* AC, *y estàn entre unas misмas paralelas* AC, DB, *son iguales.*

DE-



Secc. II. Geom. Lam. IV.

DEMONSTRACION.

Supongaſe CE paralela à AD, y AF paralela à BC, con lo que reſultaràn los paralelofgramos CF, AE iguales (97); pero el triangulo ABC es mitad del paralelogramo CF, y el triangulo ADC es mitad del paralelogramo AE (95): luego tambien ſeràn iguales (38. *Arith.*); que es, &c. (*Es la* 37. 1. *Eucl.*)

COROLARIO. (Fig. 48.)

100 *Los triangulos* ABC, DEF, *que tienen iguales Vaſes* AC, DF, *y eſtàn entre las miſmas paralelas* AF, BE, *ſon iguales*; pues ſupueſtas la CN, FM paralelas à AB, DE, à fin de perfeccionar los paralelofgramos AN, DM, ſeràn eſtos iguales (98): luego ſus mitades (38. *Arith.*) los triangulos ABC, DEF. (95) (*Es la* 38. 1. *Eucl.*)

PRO-

PROPOSICION XXIII.

THEOREMA. (*Fig.*46.)

101 *Si un triangulo* ABC, *y un paralelogramo* AE *tienen una miſma Vaſe* AC, *y eſtàn entre las miſmas paralelas, el paralelogramo ſerà duplo del triangulo.*

DEMONSTRACION.

Porque ſupueſta AF paralela à CB, los paraleloſgramos AE, CF ſeràn iguales (97); pero el triangulo ABC es mitad del paralelogramo CF (95): luego tambien ſerà mitad del paralelogramo AE (38. *Arith.*); eſto es, que el paralelogramo AE, es duplo del triangulo ABC; que es, &c. (*Es la* 41. 1. *Eucl.*)

SCHOLIO.

102 Debe notarſe, que la igualdad de

de que se ha hablado en estos ultimos articulos, es solamente en quanto al area, ò espacio de los triangulos, y paralelosgramos, à distincion de la igualdad total, que requiere sean iguales en area angulos, y lados. (47)

PRACTICAS

SOBRE LA CONSTRUCCION de las Lineas, Angulos, y Figuras definidas.

AXIOMA VI. (Fig. 49.)

103 *En todo triangulo* ABC, *qualesquiera dos lados* AB, BC, *tomados juntos, son mayores, que el tercero* AC. Infierese immediatamente de las definiciones de la linea recta, y triangulo (7. y 35.) (*Es la* 20. 1. *Eucl.*)

PROPOSICION XXIV.

PROBLEMA. (*Fig.* 50.)

104 *Dividir una recta* AB *en dos partes iguales.*

RESOLUCION.

Desde los puntos AB con un mismo intervalo, pero mayor que la mitad de la linea dada (103), haganse à una, y otra parte dos arcos de circulo, que se corten en C, y en F. (53)

Tirese la CF, que dividirà la recta AB en dos partes iguales en E.

DEMONSTRACION.

Tiradas las rectas CA, CB, FA, FB, los triangulos CAF, CBF tienen los lados AC = CB, AF = BF (31), CF comun: lue-

luego ſon totalmente iguales (67), de que reſulta el angulo ACE=ECB (47). En los triangulos ACE, BCE ſe tiene AC=CB, CE comun, los angulos ACE, ECB, comprehendidos iguales: luego ſon totalmente iguales (62), por conſiguiente AE=EB (47), que es lo que ſe havia de hacer, y demoſtrar. *Es la* 10. *del* 1. *de Euclides.*

PROPOSICION XXV.

PROBLEMA. (Fig. 52.)

105 *Dada una recta* AB, *y un punto en ella* E, *levantar de èl una perpendicular.*

RESOLUCION.

Deſde el punto E à una, y otra parte con intervalo arbitrario, corteſe EM=EN. (60)

Deſde los puntos M,N con intervalo

arbitrario, mientras ſea mayor que la mitad de MN (103), haganſe dos arcos, que ſe corten en C.

Digo, que tirando la CE, ſerà perpendicular ſobre AB.

DEMONSTRACION.

Tiradas las rectas NC, MC, reſultan los triangulos NCE, MCE, en que NE=EM; NC=MC, unos, y otros por conſtruccion, CE comun: luego ſon totalmente iguales (67); por conſiguiente los angulos en E, ſeràn iguales (47); eſto es, rectos, y la CE perpendicular ſobre AB. (24) (*Es la* 11. *del* 1. *Eucl.*)

PROPOSICION XXVI.

PROBLEMA. (*Fig.* 51.)

106 *De un punto* C *fuera de una linea*

nea AB, *indefinida*, *baxar à ella una perpendicular.*

RESOLUCION.

Del punto C deſcribaſe un arco de circulo, que corte la AB en E, y en F.

Con el miſmo intervalo, ù otro mayor, que la mitad de EF, haganſe à la otra parte deſde EF dos arcos de circulo, que ſe corten en G.

Digo, que tirada CG, ſerà perpendicular à AB en H.

DEMONSTRACION.

Tiradas las CE, CF, GE, GF, los triangulos CEG, CFG tienen los lados CE=EG; CF=FG (31), CG comun: luego ſon totalmente iguales (67); por conſiguiente el angulo ECG=FCG(47).

Los triangulos CEH, CFH tienen los lados CE = CF; CH comun: el angulo ECG = FCG: luego son totalmente iguales (62), y los angulos en H iguales (47); por consiguiente rectos, y CH perpendicular sobre AB (24); que es, &c. (*Es la* 12. 1.*Eucl.*)

PROPOSICION XXVII.

PROBLEMA. (*Fig.*53.)

107 *Dado un angulo rectilineo* ABC, *dividirlo en dos partes iguales.*

RESOLUCION

Desde el punto B, como centro, hagase un arco de circulo EF, que cortarà los lados del angulo en E, y en F.

Desde los mismos puntos EF, con un mismo intervalo, pero mayor que la mi-

tad

tad de la distancia EF, hagase la interseccion G.

Digo, que tirando la BG, dividirà el angulo en dos partes iguales.

DEMONSTRACION.

Tiradas las rectas EG, FG, resultaràn los triangulos BEG, BFG, en que BE = BF; GE = GF, unos, y otros por construccion (31); BG comun: luego son totalmente iguales (67); por consiguiente el angulo x = z (47); que es, &c. (*Es la 9. 1. Eucl.*)

SCHOLIO I. (Fig. 53.)

108 Si el mismo angulo se quiere dividir en quatro partes iguales, se dividirà, como queda explicado, cada angulo x, z en dos partes iguales, y el todo quedarà dividido en quatro; si el mis-

mo ſe quiere dividir en ocho partes iguales, ſe dividirà cada uno de los quatro en dos partes iguales, y el todo quedarà dividido en ocho; en cuya conformidad ſe podrà dividir el miſmo en 16, 32, 64 partes iguales, y aſsi por continua biſeccion.

SCHOLIO II.

109 Pero *el dividirlo en* 3, 5, 7, &c. *ù otras partes iguales, que no ſean de las de continua biſeccion*, ſon Problemas, à que no ha dado todavia ſolucion la Geometria de Euclides del Circulo, y Linea recta, por mas que à ello ſe han dedicado en todos tiempos célebres Geometras: Conſigueſe eſto por la Geometria ſublìme, ò de las curbas, como en ſu lugar verèmos.

SCHOLIO III. (Fig. 54.)

110 Excepcion de lo dicho es la *triſeccion del angulo recto*, pues ſe executa de eſte modo: Sea el angulo recto ABC à dividir en tres partes iguales. Con qualquier intervalo BC, deſde los puntos B, C, deſcribanſe dos arcos, que ſe corten en D, y tirenſe las BD, CD: con lo que el triangulo BDC tendrà ſus tres lados iguales (31), eſto es, ſerà equilatero (36); por conſiguiente ſus angulos ſeràn iguales entre sì (65); y valiendo entre los tres dos rectos (84), cada uno valdrà los dos tercios de un recto; eſto es, que el angulo DBC ſerà los dos tercios del angulo ABC: luego dividiendo el angulo DBC en dos partes iguales con la recta BE (107), quedarà el todo dividido en tres partes iguales.

PROPOSICION XXVIII.

PROBLEMA. (Fig. 55.)

III *Sobre una recta* AB, *y un punto en ella* A, *hacer un angulo rectilineo igual à otro angulo rectilineo dado* MNO.

RESOLUCION.

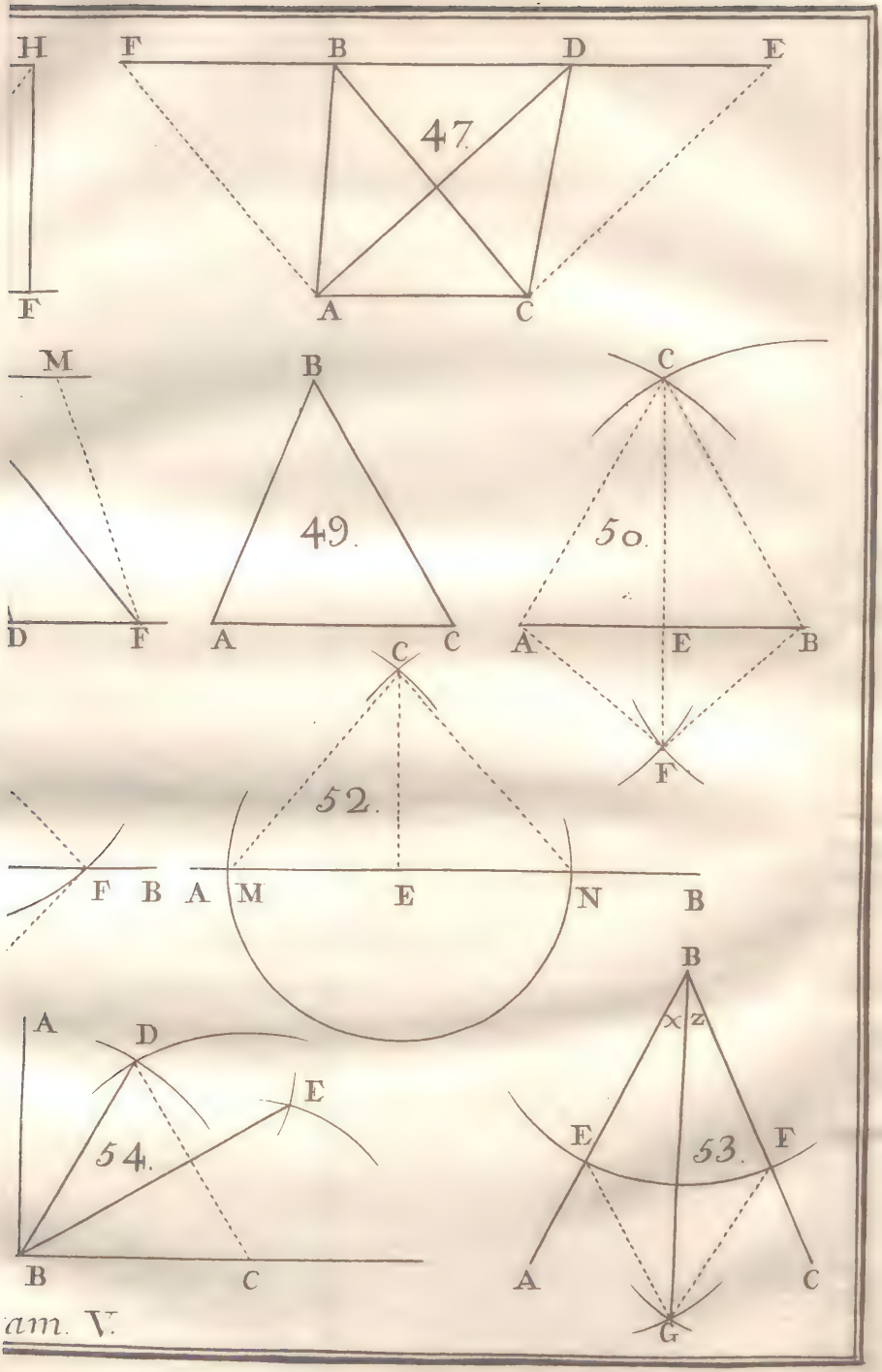
Desde el punto N, como centro, hagase un arco de circulo MO, que corte los lados del angulo dado.

Desde A, con el mismo intervalo, hagase un arco de circulo arbitrario EG.

Tomese la distancia OM, y con ella desde E hagase un arco, que corte al primero, por exemplo en G.

Digo, que tirando la AG, serà el angulo EAG igual al angulo O. NM.

DE-


H
F
F
B
D
E
47
A
C
M
D
F
B
49.
A
C
C
50.
A
E
B
F
C
52.
F
B
A
M
E
N
B
A
D
E
54.
B
C
B
x
z
E
F
53.
A
C
G

am. V.

PROPOSICION XXVIII.

PROBLEMA. (Fig. 55.)

III *Sobre una recta* AB, *y un punto en ella* A, *hacer un angulo rectilineo igual à otro angulo rectilineo dado* MNO.

RESOLUCION.

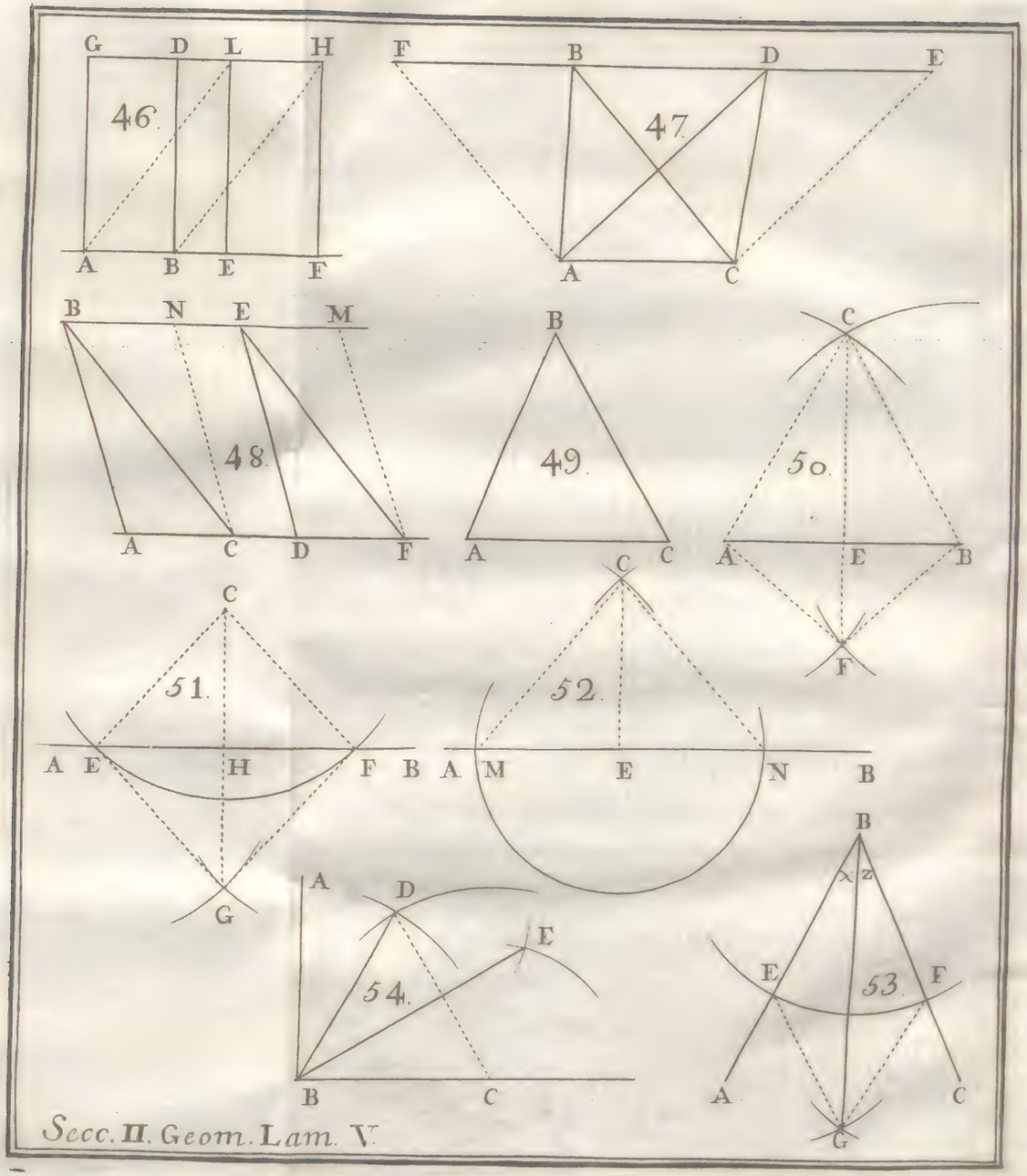
Desde el punto N, como centro, hagase un arco de circulo MO, que corte los lados del angulo dado.

Desde A, con el mismo intervalo, hagase un arco de circulo arbitrario EG.

Tomese la distancia OM, y con ella desde E hagase un arco, que corte al primero, por exemplo en G.

Digo, que tirando la AG, serà el angulo EAG igual al angulo O. NM.

DE-



Secc. II. Geom. Lam. V.

DEMONSTRACION.

Tiradas en uno, y otro angulo las MO, EG, reſultaràn los dos triangulos ONM, EAG, en que AE=NO; AG=NM; EG=OM, todos por conſtruccion (31); luego ſon totalmente iguales (67); por conſiguiente el angulo EAG, ſerà igual al angulo dado ONM. (47) (*Es la 23. 1. Euclides.*)

PROPOSICION XXIX.

PROBLEMA. (Fig. 56.)

112 *Dado un punto* E, *tirar por èl una paralela à una recta dada* AB.

RESOLUCION.

Tireſe qualquier recta EG deſde el punto dado E ſobre la AB.

Formeſe en E ácia la parte de A, un angulo GEF igual al angulo EGB. (111)

Prolongueſe la FE de una, y otra parte quanto ſe quiera, y ſerà paralela à AB; pues los angulos alternos por conſtruccion ſon iguales. (81) (*Es la* 31. *del* 1. *Euclides.*)

PROPOSICION XXX.

PROBLEMA. (Fig. 57.)

113 *De tres rectas dadas* M, N, O, *formar un triangulo, con tal, que dos de ellas tomadas juntas, ſean mayores que la tercera.* (103)

RESOLUCION, Y DEMONSTRACION.

Tireſe una recta larga à voluntad, y tomeſe en ella la parte AB igual à qualquiera de ellas M. (60)

Deſ-

Desde A con la distancia N, hagase un arco, y desde B con la distancia O, hagase otro arco, que corte el primero en C.

Digo, que tirando las rectas AC, CB, se tendrà el triangulo ABC, construido de las tres rectas dadas M, N, O, pues por construccion AB = M; AC = N; BC = O (31. 67.); que es, &c. (*Es la* 22. 1. *Euclides.*)

COROLARIO.

114 Si las lineas fueren iguales, el triangulo serà *equilatero* (36), con lo que se satisface la *proposicion* 1. *del libro* 1. *Euclides*; si dos de ellas solamente fueren iguales, el triangulo serà *Isosceles*; y si las tres fueren desiguales, el triangulo serà *Escaleno.* (36)

PRO-

PROPOSICION XXXI.

PROBLEMA. (Fig. 58.)

115 *Dadas dos rectas* M, N, *y un angulo* D, *formar un triangulo* ABC; *con tal, que los lados* AB, BC *sean iguales à las dos rectas, y el angulo comprehendido* B, *igual al dado* D.

RESOLUCION, Y DEMONSTRACION.

Tomese una recta AB = M (60); y en el punto B hagase un angulo B, igual al dado D (111); cortese BC = N (60): con lo que tirando la AC, el triangulo ABC serà igual del que se desea (62); que es, &c.

PRO-

PROPOSICION XXXII.

PROBLEMA. (Fig. 59.)

116 *Dadas dos rectas* M, N, *y un angulo* D, *formar un triangulo, con tal, que los lados* AB, BC *sean iguales à las dos rectas dadas, y el angulo opuesto* C *igual al dado* D.

RESOLUCION, Y DEMONSTRACION.

Tirese AC arbitraria, y en el punto C hagase un angulo C = al dado D (111); cortese CB = N (60), y tomando la distancia M, desde B, cortese en A, y en O, con lo que tirando las AB, OB, se tendrà el triangulo ABC de las condiciones pedidas, quando el angulo A, opuesto al lado BC, huviere de ser obtuso, y el triangulo BOC, quando el angulo opuesto O debe ser agudo (92); pues cortando el circulo à la OC en O, y en A, qualquie-

quiera de los angulos BOC, BAO, debe ſer agudo (87): luego BAC obtuſo (68); y teniendo uno, y otro triangulo las miſmas condiciones, ſolo pueden diferir en que el angulo O ſea agudo, ò el A obtuſo, cuya circunſtancia debe conſtar tambien de la propueſta.

PROPOSICION XXXIII.

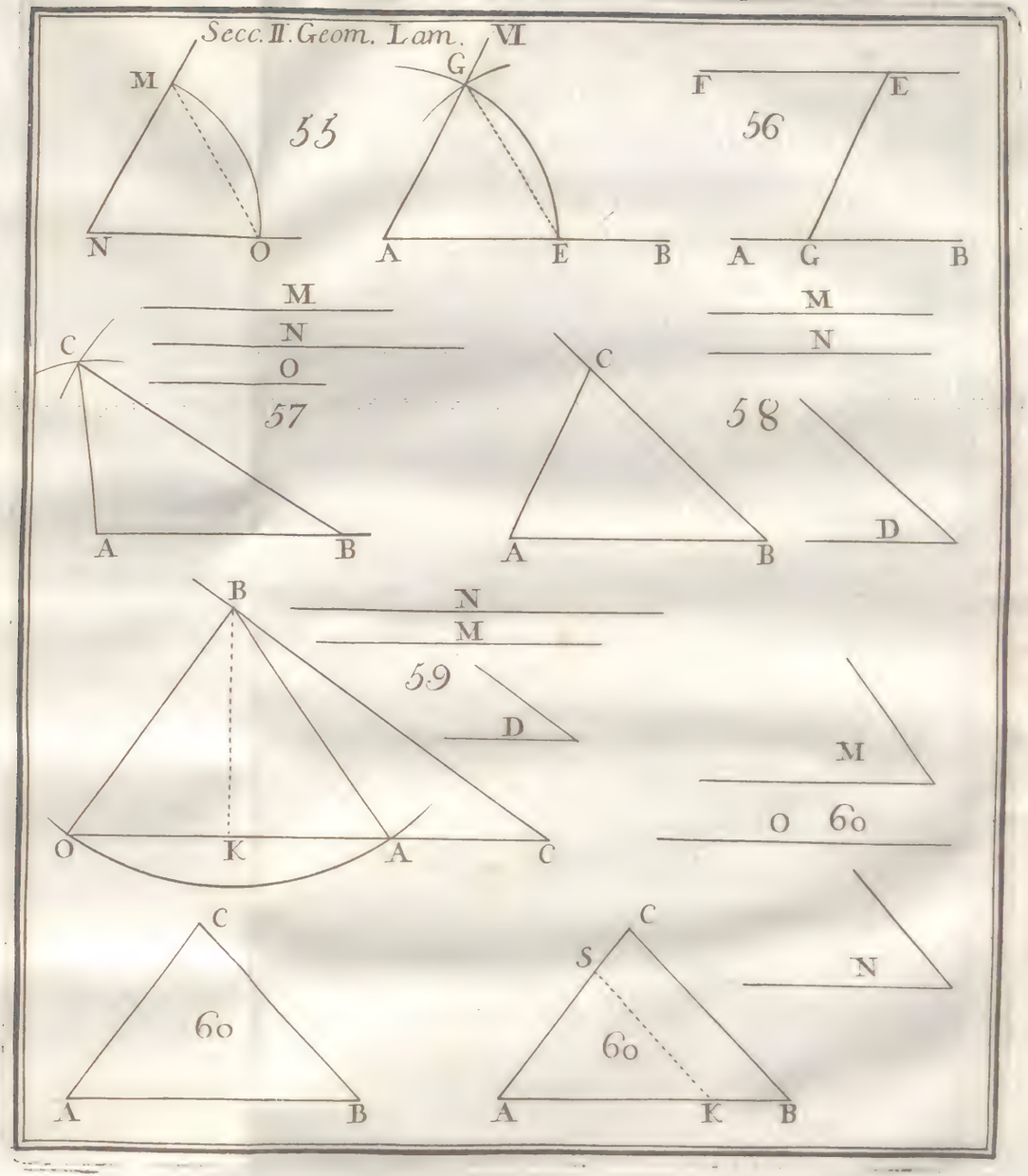
PROBLEMA. (Fig. 60.)

117 *Dados dos angulos* M, N, *y un lado* O, *conſtruìr un triangulo* ABC, *con tal, que los dos angulos ſean menores, que dos rectos.* (73)

RESOLUCION, Y DEMONSTRACION.

Tireſe una recta AB = O, y en los extremos A, y B haganſe los angulos A, y B iguales à los dados M, y N (111), con lo que el triangulo ABC, que reſulta, ſerà el que ſe pide. (79)

Si


Secc. II. Geom. Lam. VI
55
56
57
58
59
60
60
60

Si el angulo A huviere de ser igual al angulo M, y el angulo C igual al angulo N, se tomarà AB=O; en A se harà un ángulo =M, y en qualquier punto S hagase un angulo = N, con lo que tirando BC paralela à SK (112), se tendrà el triangulo ABC de las condiciones pedidas (79): pues AB=O; A=M; C=N; y que C, y S son iguales por externo, è interno. (82)

PROPOSICION XXXIV.

PROBLEMA. (Fig. 61.)

118 *Dadas dos rectas* M,N, *y un angulo* D, *formar de ellas un paralelogramo, que tenga un angulo igual al dado* D.

RESOLUCION, Y DEMONSTRACION.

Tirese AB=M, en el punto A, hagase un angulo BAE igual al dado D. (111)

Corteſe la AE = à la otra dada CG; por el punto E, tireſe la EO paralela, è igual à AB (112), con lo que tirando la BO, ſerà el quadrilatero ABEO el paralelogramo con los requiſitos pedidos. (95)

COROLARIO I.

119 Si las lineas dadas fueren iguales, y el angulo dado recto, el referido paralelogramo ſerà un *quadrado*, como ſe puede reconocer del paraleliſmo; y con éſte ſe ſatisface à la 46. *del* 1. *de Euclides.*

COROLARIO II.

120 Si las lineas fueren iguales, y el angulo dado agudo, ù obtuſo, el paralelogramo ſerà un *Rhombo.* (40)

CO-

COROLARIO III.

121 Si las lineas fueren desiguales, y el angulo recto, el paralelogramo serà un *quadrilongo.* (39)

COROLARIO IV.

122 Finalmente, si siendo las lineas desiguales, el angulo fuere obliquo, el paralelogramo serà un *Rhomboyde.* (41)

SOBRE LA MEDIDA DE LAS Lineas, Angulos, y Figuras definidas.

DEFINICION XXXII.

122 *Medida de una magnitud,* es otra magnitud menor de la misma especie, mediante cuya comparacion con la mayor, venimos en conocimiento de quantas veces ésta contiene à la referida magnitud tomada por medida.

SCHOLIO.

123 Deben ſer de una miſma eſpecie, pues para la comparacion de una coſa con otra, han de ſer ambas de una miſma eſpecie. (2. *Pr. Not.*)

COROLARIO.

124 Luego *los angulos ſe deben medir con angulos, las lineas con lineas, las ſuperficies con ſuperficies, y los ſolidos con ſolidos*, como eſto ultimo ſe verà adelante.

AXIOMA VII.

125 *Las coſas que tienen una miſma, ò igual medida, ſon iguales; y ſi ſon iguales, tienen una miſma, ò igual medida.*

DEFINICION XXXIII. (Fig. 62.)

126 *Medida de un angulo* ABC, es el

el ſector, ò porcion de circulo ABC, deſcripto deſde el Vertice B, è intercepto entre ſus lados A B, B C.

PROPOSICION XXXV.

THEOREMA. (Fig. 63.)

127 *Los ſectores* ABC, DEF, *de un miſmo circulo, que comprehenden angulos iguales, tienen ſus Vaſes, ò arcos* A C, DF *iguales.*

DEMONSTRACION.

Imagineſe, que el ſector A B C de tal ſuerte ſe ſobrepone al ſector D E F, que el punto B cayga ſobre el punto E, y el lado BC ſobre el lado EF; los quales, por ſer radios de un miſmo circulo, ſeràn iguales (31), por lo que el punto C caerà ſobre el punto F (50), y por ſer iguales los angulos B, E, y los lados B A, ED,

ED, el lado BA, caerà ſobre ED, y el punto A ſobre el punto D (50. 51.): luego el arco CA coincidirà con el arco FD (29): luego ſeràn iguales. (47)

COROLARIO I.

128 *Los ſectores de circulo, que comprehenden angulos iguales, ſon totalmente iguales.* (47)

COROLARIO II.

129 *A iguales ſectores de circulo correſponden iguales arcos*; por conſiguiente *à iguales angulos, correſponden iguales arcos.*

COROLARIO III. (Fig. 62.)

130 Por eſto miſmo ſe define comunmente, *que medida de un angulo* ABC, *es el arco* AC *de circulo deſcripto deſde el Vertice* B, *è intercepto entre ſus lados.*

DE-

DEFINICION XXXIV.

131 *Grado* es una de las 360. partes en que se imagina dividida la circunferencia de qualquier circulo. *Minuto* es una de las 60. partes en que se supone dividido un grado. *Minuto segundo*, una de las 60. partes de un minuto primero; *minuto tercero*, una de las 60. partes de un minuto segundo, &c.

SCHOLIO.

132 Para abreviar la expresion de los grados, minutos, segundos, &c. se indican los grados con una o encima; los minutos con una rayita ´ ; los segundos con dos ´´ &c. Asi para indicar 35 grados, 30 minutos, y 15 segundos, se escribirà assi 35,° 30´ , 15.´´

COROLARIO I.

133 La medida de todos los angulos formados en un punto, ſiendo un circulo, ò ſu circunferencia, valdrà éſta aſsi como aquellos quatro rectos (70); eſto es, que 360.° *ſon el valor de 4 rectos.*

COROLARIO II.

134 Valiendo dos rectos todos los angulos formados en un punto ſobre una recta (69); *ſu medida ſerà un ſemicirculo*, ò medio circulo, eſto es, 180.°

COROLARIO III.

135 *La medida del angulo recto ſerà la quarta parte del circulo*, ò mitad del ſemicirculo, llamado tambien *quadrante*; eſto es, que el valor de un angulo recto, ſerà 90.°

SCHO-

SCHOLIO.

136 Para las practicas de los angulos ſobre el papel tienen los eſtuches Mathematicos un ſemicirculo dividido en ſus 180° mediante el qual

COROLARIO IV. (Fig. 64.)

137 Para *ſaber de quantos grados es un angulo* ABC, ſe colocarà el ſemicirculo de ſuerte, que ſu centro cayga ſobre el punto B, y ſu diametro ſobre BC; con lo que notando quantos grados corta el lado BA, de tantos grados ſe dirà ſer el angulo propueſto.

COROLARIO V. (Fig. 65.)

138 Para *formar un angulo*, por exemplo, de 50.° *ſobre una recta* M N; en el punto M, ſe colocarà el ſemicirculo de ſuerte, que ſu centro cayga ſobre el punto

to M, y el diametro ſobre M N: con lo que haciendo una ſeñal S en la correſpondencia de los 50° por ella, y por el punto M, ſe tirarà la recta M S, y entonces el angulo NMS, ſerà de 50.°

DEFINICION XXXV.

139 *Medida de las lineas* es una recta de longitud arbitraria, y diviſible en otras partes menores, ſegun convenga.

DEFINICION XXXVI.

140 *Medida de las ſuperficies* es un quadrado, cuyo lado es igual à la recta, que ſe tomò para medida de las lineas.

DEFINICION XXXVII.

141 *Altura de una figura* es la perpendicular tirada deſde el Vertice ſobre la Vaſe, ò ſobre la prolongacion de eſta.

DE-

DEFINICION XXXVIII.

142 *Hallar la area de una figura plana*, es buſcar quantos quadrados contiene ſu ſuperficie, de aquel que ſe tomò por medida.

PROPOSICION XXXVI.

THEOREMA. (Fig. 66.)

143 *Los triangulos* A B C, D E F, *ò paraleloſgramos, que tiene una miſma altura, ſon entre sì como ſus Vaſes* AC, DF.

DEMONSTRACION.

Por ſuponerſe iguales las alturas, ò perpendiculares BA, ED (141), las B H, AF ſeràn paralelas (44): luego los triangulos ABC, DEF ſe ſuponen eſtàr entre unas miſmas paralelas. Sea la Vaſe DF, por exemplo, dupla de AC; por lo que

ti-

tirada à ſu mitad O, la E O; qualquiera de los dos triangulos DEO, OEF, ſerà igual al triangulo ABC (100): luego todo el triangulo D E F ſerà duplo del triangulo ABC; eſto es, que ſerà el triangulo DEF al triangulo ABC, como la Vaſe DF à la Vaſe AC. Lo miſmo ſe demueſtra en qualquier otra razon; por conſiguiente los paraleloſgramos DH, AG, duplos de los referidos triangulos (101), ſeràn tambien proporcionales con ſus Vaſes, DF, AC. (143. *Arith.*)

COROLARIO.

144 *Los triangulos, ò paraleloſgramos, que tienen una miſma Vaſe, ſon entre sì como ſus alturas.*

PROPOSICION XXXVII.

THEOREMA. (Fig. 67.)

145 *Hallar la area de un rectangulo* ABCD.

RESOLUCION.

Multipliqueſe un lado AB por el otro AC, y el producto ſerà la area del rectangulo.

DEMONSTRACION.

Supongaſe que el lado AB es de 4; pies, y el lado AC de 3; por lo que divididos los lados AB, CD en quatro partes iguales, ſe uniràn las diviſiones con rectas, las quales ſeràn paralelas à AC: divididos aſsimiſmo los lados AC, BD en tres partes iguales, ſe uniràn las diviſiones con rectas, las quales ſeràn paralelas à AB; en cuya conformidad, queda-

darà el rectangulo total dividido en varios quadrados, como es facil perſuadirſe de ello, atendiendo à la figura. Qualquier ſérie de quadrados paralelos à AB, contiene quatro de eſtos: luego las tres ſéries, que componen el rectangulo total, contendràn 24: eſto es, ſe tendrà la ſuma de ellos, ò area del rectangulo propueſto, multiplicando el valor del lado AB = 4. por el lado AC = 3. que es, &c.

COROLARIO I.

146 Para *hallar la area de un quadrado*, ſe multiplicarà ſu lado por sì miſmo.

COROLARIO II.

147 Conſtando la vara linear de 3. pies, contendrà la quadrada 9. pies quadrados, el pie quadrado 144. pulgadas quadradas, que es el producto de 12. pulgadas por sì miſmo: la pulgada quadra-

drada 144. lineas quadradas; la linea quadrada 144. puntos quadrados, &c.

DEFINICION XXXIX.

148 *Pie corriente* ſobre vara, ſe dice un rectangulo, que por un lado tiene un pie, y por otro una vara linear. *Pulgada corriente* ſobre una vara, es un rectangulo, que por un lado tiene una pulgada, y por otro una vara linear: en cuya inteligencia ſe deben tomar las lineas, puntos, &c. corrientes ſobre vara.

COROLARIO. I.

149 Teniendo todos eſtos rectangulos una miſma altura de la vara, ſeràn entre sì como ſus Vaſes; eſto es, como los pies, pulgadas, lineas, &c. que tengan por Vaſe. (143)

COROLARIO II.

150 Por esto, si conocido un cierto producto, ò area de un rectangulo, cuya altura sea una vara, se quiere saber el de otro, cuya altura sea la misma vara, y su Vase 1 pie, se tomarà la tercera parte del referido producto.

Para 2 pies se tomaràn las dos terceras partes.

Para 1 pulgada $\frac{1}{12}$ del producto de 1 pie.

Para 2 pulgadas $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ del producto del mismo pie.

Para tres pulgadas $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ del producto de 1 pie.

Para 4 pulgadas $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ del producto de 1 pie.

Para 5 pulgadas se dividirà en las partes alicotas del 12, que son 3 y 2: por 2 se tomarà la sexta parte del producto de 1 pie; y por 3 pulgadas la quarta parte.

Pa-

Para 6 pulgadas ſe tomarà la mitad del producto de 1 pie.

Para 7 pulgadas ſe dividirà en las partes alicotas 4 y 3 ; por 4 ſe tomarà la tercera parte, y por 3 la quarta parte del producto de 1 pie.

Para 8 pulgadas ſe dividirà en 4 y 4; por cada 4 ſe tomarà la tercera parte.

Para 9 pulgadas ſe dividirà en 3, 3, y 3; por cada 3 ſe tomarà la quarta parte.

Para 10 pulgadas ſe dividirà en 6, y 4; por 6 ſe tomarà la mitad, y por 4 el tercio.

Para 11 pulgadas ſe dividirà en 4,4, y 3; por cada 4 ſe tomarà la tercera parte, y por el 3, la quarta parte.

COROLARIO III.

151 Del miſmo modo ſe tratarán las lineas al reſpecto de las pulgadas; y los puntos al reſpecto de las lineas.

DEFINICION XL.

152 El calculo, que aſsi ſe executa por las partes de la vara, ſe dice *calculo de las partes alicotas*. En lugar de que el area de una figura ſe debia hallar por pies, pulgadas quadradas, &c. conforme al articulo 142. ſe uſa en la práctica del de las partes alicotas, por la ſuma comodidad que ofrece, ſegun ſe puede vèr en los exemplos ſiguientes.

SCHOLIO.

153 Para abreviar en el eſcrito la expreſsion de varas, pies, pulgadas, &c. las varas ſe expreſſan por una o, pueſta encima de ſu numero; los pies por una rayita ´, las pulgadas por dos aſſi ´´: las lineas por tres ´´´, &c. aſsi, para eſcribir 24 varas, 2 pies, 6 pulgadas, y 10 lineas, ſe pondrà 24°, 2´, 6´´, 10´´´.

PRO-

PROPOSICION XXXVIII.

PROBLEMA. (*Fig.*68.)

154 *Hallar la area de un paralelogramo obliquangulo* E F G H.

RESOLUCION, Y DEMONSTRACION.

Multipliqueſe la Vaſe EH por la perpendicular, ò altura GK: pues tirada tambien la perpendicular F L, el rectangulo L F G H es igual al obliquangulo E F G K (97); pero aquel ſe halla multiplicando E H = F G por G K (145): luego tambien éſte.

EXEMPLO.

Para hallar la area del miſmo paralelogramo obliquangulo, ſuponiendo EH = 3° + 2′ + 6″, y la altura GK = 3,°

Multipliqueſe primero 3°. por 6‴ y reſultaràn 18 rectangulos, cada uno de ellos de una pulgada de Vaſe, y una vara de alto; y como 12 de eſtos componen un pie corriente, ſe guardarà 1′ para anumerarlo con el producto de los pies, y ſe eſcribiràn debaxo las 6‴ reſtantes.

3°	+	2′	+ 6‴
3°			
11°	+	1′	+ 6‴

Multipliqueſe deſpues el miſmo 3° por 2′, y à ſu producto 6′ añado 1′ que llevo; con lo que ſe tendràn 7′; 3 de eſtos componen una vara quadrada: luego ſeràn 2°. quadradas, que ſe guardaràn para anumerarlas con las varas, mas 1′, que ſe eſcribirà en correſpondencia de los pies.

Multipliqueſe ultimamente 3°. por 3°, y al producto 9°. añado 2°, que llevo, y ſe tendràn 11°, con lo que ſe con-

concluirà, que el producto total es $11^{b} + 1' + 6''$.

PROPOSICION XXXIX.

PROBLEMA.

155 *Hallar la area de un triangulo.* (Fig. 69. y 70.)

RESOLUCION, Y DEMONSTRACION.

Si fuere rectangulo, como A B C, (Fig. 69.) se multiplicarà la Vase A B por la mitad de la altura A C; pues es la mitad del rectangulo A O de la misma Vase, y altura. (101)

Si fuere obliquangulo, como E F G, (Fig. 70.) se multiplicarà la Vase E G por la mitad de la perpendicular F S, baxada del angulo F sobre la Vase E G: pues si se transfiere E G desde S, hasta N, y

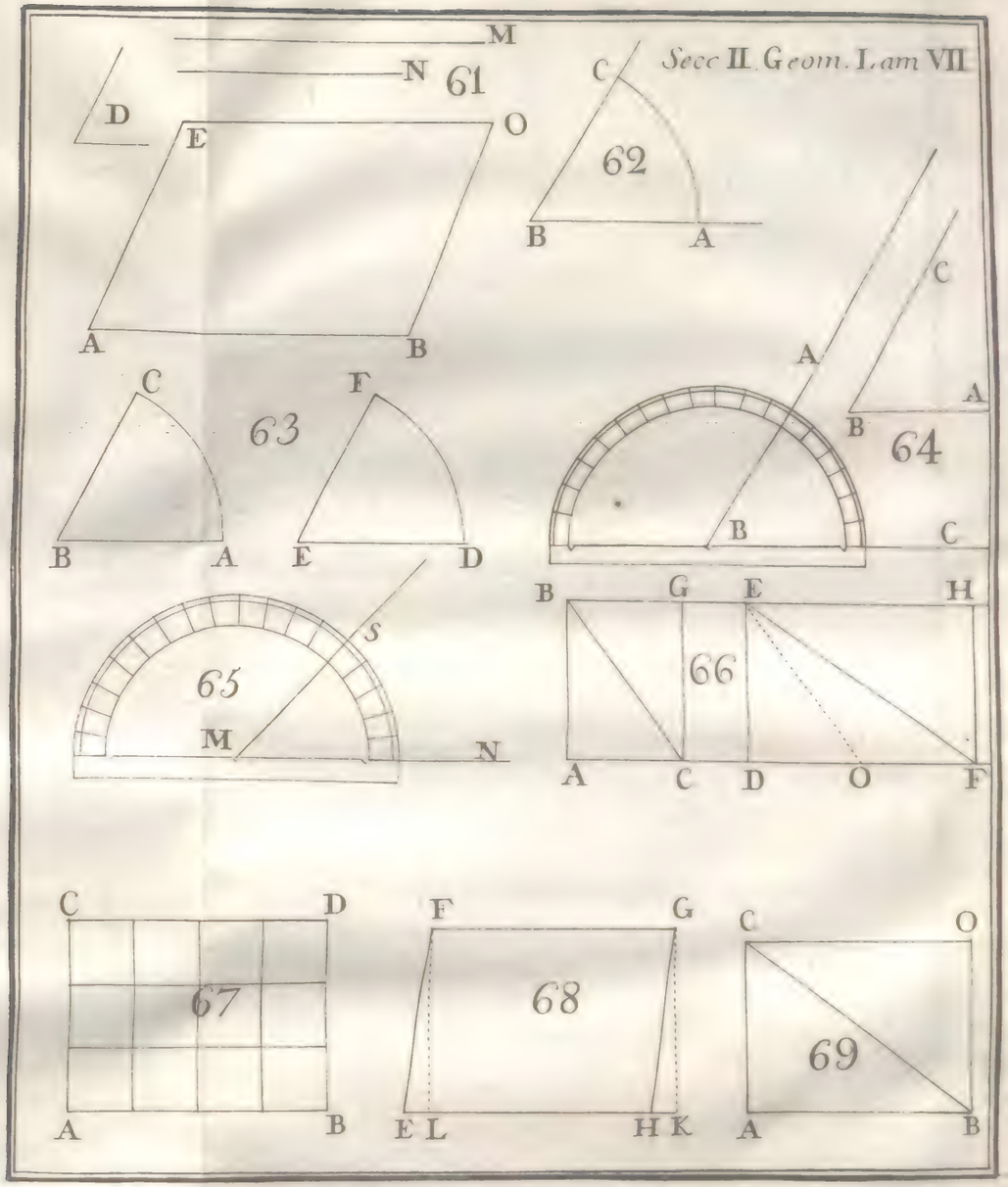
se tira la F N, el triangulo rectangulo S F N será igual al propuesto E F G (99); pero aquel se halla multiplicando la Vase S N = E G por la mitad de la altura S F: luego tambien este.

EXEMPLO. (Fig. 70.)

Para hallar la superficie del triangulo obliquangulo E F G; suponiendo E G = 3° + 2′ + 6″ y F S = 6° + 2′ + 8″: la mitad de este lado es 3° + 1′ + 4″ con que se deberá multiplicar 3° + 2′ + 6″ por 3° + 1′ + 4″ à fin de tener la area del triangulo.

	3° + 2′ + 6″
	3° + 1′ + 4″
Por 3°)	11° + 1′ + 6″
Por 1′)	1 + 0 + 10
Por 4″)	0 + 1 + 3 † 4‴
area.	13° + 6 + 7″ † 4‴

Multipliquese primero 3° por 3° + 2′


Secc II. Geom. Lam VII
61
62
63
64
65
66
67
68
69

$2' + 6''$ que en virtud de la operacion del exemplo antecedente, ſerà ſu producto $11° + 1' + 6''$

Para multiplicar deſpues $1'$ por $3° + 2' + 6''$ ſe tomarà la tercera parte de $3° + 2' + 6'' = 1° + 6 + 10''$, atento de que ſi $1'$ fueſſe $1°$, daria la miſma cantidad de $3° + 2' + 6''$ pero ſuperficial; y ſiendo la tercera parte, deberà dàr tambien la tercera parte.

Para multiplicar por $4''$ ſe tomarà la tercera parte de lo que diò un pie, eſto es la tercera parte de $1° + 6 + 10'' = 0 + 1' + 3'' + 4'''$.

Sumando, pues, las tres partidas referidas, ſe tendrà $13° + 6 + 7'' 4'''$ por la area del triangulo propueſto.

SCHOLIO I.

156 *Si el numero de varas del multi-*

plicador fuere muy crecido, ſe comenzarà à multiplicar varas por varas, y deſpues por los pies, pulgadas, &c. como ſi ſe huvieſſen de multiplicar $84^{\circ}+2'+6''$ por 44°. ſe multiplicaràn primero 84 por 44°: deſpues $2'$ por 44°: y deſpues $6''$ por 44°.

SCHOLIO II.

157 *Si en el multiplicador faltáren pies, ò pulgadas, haviendo lineas*; ſe ſupondrà en el lugar de los pies, un pie, ò en el lugar de las pulgadas, una pulgada, &c. à fin de ſacar de ſu producto con mas comodidad las correſpondientes à las lineas, puntos, &c: con prevencion, de que aquel producto ſupueſto ſe raye, para no ſumarlo con los demàs. Por exemplo, que ſe huvieſſen de multiplicar $10^{\circ}+1'+4''$ por $4^{\circ}+0+6''$ ſe multiplicarà primero 4° por la partida de arriba: deſpues en los pies ſe ſupondrà

drà 1 pie, y por èl ſe ſacarà la tercera parte de $10^{\circ}+1'+4''$, que es $3^{\circ}+1'+5''+4'''$; pero como es producto ſupueſto, ſe rayarà aſsi $3^{\circ}+1'+5+4'''$ y de èl ſe podrà ſacar con facilidad el producto correſpondiente à 6 pulgadas, que ſerà ſu mitad.

SCHOLIO III.

158 De eſtos falſos ſupueſtos ſe uſa tambien *quando la parte que ſe và à tomar es un quebrado muy pequeño*, pues fatiga mucho la memoria. Por exemplo, ſi teniendo el producto correſpondiente à 10 pulgadas, quiero ſacar de èl el producto correſpondiente à 2 lineas, era meneſter que tomára $\frac{1}{60}$: mas facilmente ſe executa tomando la decima parte del producto de 10. pulgadas, con lo que ſe tendrà el producto de 1 pulgada, de quien 2 lineas, ſiendo la ſexta parte, tomare $\frac{1}{6}$ del producto de la tal pulgada ſupueſta.

PRO-

PROPOSICION XXXX.

PROBLEMA. (Fig. 71.)

159 *Hallar la area de qualquier figura rectilinea.*

RESOLUCION, Y DEMONSTRACION.

Tomeſe dentro de la Figura qualquier punto O, y deſde èl tirenſe rectas à los angulos, con lo que quedarà dividida en triangulos: halleſe la area de cada uno en particular, y ſumando las de todos, ſe tendrà la area de la Figura.

TRIAN-

TRIANGULO I. AOB.

AB =	4°	+2′	+2″
½HO =	10	+1	+3
por 10°)	47°	+6	+8″
por 1′)	1	+1	+8+ 8″
por 3″)	0	+1	+2+ 2
Area del triangulo. AOB=	49°	+6	+6″+ 10″

TRIANGULO II. BOC.

BC =	15°	+1′	+10″
½OK =	12	+2	+ 6
por 12°)	187	+1	+ 0
por 1′)	5	+0	+ 7+4″
por 1′)	5	+0	+ 7+4
por 6″)	2	+1	+ 9+8
Area del triangul. BOC.	200°	+1′	+0″+4″

TRIAN-

TRIANGULO III. COD.

CD = 85° + ó + 9‴

½OL = 15 + 0 + 3

por 15°) 1278 + 2 + 3

por ó) 28 + 1 + 3

por 3‴) 7 + 0 + 3 + 9‴

Area del triangulo COD. 1285 + 2′ + 6‴ + 9⁗

TRIANGULO IV. DOE.

DE = 24° + 1′ + 4‴

½OM = 9 + 0 + 11′

por 9°) . . 220 + 0 + 0

por ó) . . 8 + 0 + 5 + 4‴

por 4″) . . 2 + 2 + 1 + 9 + 4‴

por 4″) . . 2 + 2 + 1 + 9 + 4

por 3) . . 2 + 0 + 1 + 4

Area del triangulo ODE. 227° + 1′ + 4″ + 10‴ + 8⁗

TRIAN-

TRIANGULO V. EOF.

EF = 22°+ó +2‴
½ON = 11°+ó +0‴ +6‴

por 11°..) 242 +1 +10‴
por ó...) 07°+1‴ + 0‴ +8‴
por 0‴) 0 +1 +10 +0 +8‴
por 6‴) 0 +0 +11 +0 +4

Area del triangulo OEF. 242 +2 + 9 +0 +4

TRIANGULO VI. FOG.

FG = 10°+ó+11‴
½OP = 8 +2+ 3

por 8°).. 82+1+ 4
por 1′).. 3+1+ 3 + 8‴
por 1′).. 3+1+ 3 + 8.
por 3‴).. 0+2+ 6 +11

Area del triangulo OFG. 90°+ó+ 6‴ + 3‴

TRIAN-

TRIANGULO VII.

GA =	22°+ó	+3‴	
½OZ =	11 +0	+5‴	
por 11°)	242+2	+ 9	
por ó)	7+1	+ 1	
por 3‴)	1+2	+ 6+3‴	
por 2‴)	1+0	+ 8+2	
Area del triangulo GOA.	245+2′	+11+5‴	

SUMA TOTAL.

Triangulo 1. =	49°+ó	+6‴	+10‴
Triangulo 2. =	200+1	+0	+ 4
Triangulo 3. =	1285+2	+6	+ 9
Triangulo 4. =	227+1	+4	+10+8‴
Triangulo 5. =	242+2	+9	+ 0+4
Triangulo 6. =	90+0	+6	+ 3
Triangulo 7. =	245+2	+11	+ 5
Area de la Fig.X.	2341°+2	+ 9-	+ 6‴ +0′′′′

SCHO-

SCHOLIO I.

160 Si la Figura fueſſe la de un Campo, ò terreno, cuya vara quadrada valieſſe à 4. peſos, y 7. reales = 67 reales, ſe podrà calculàr ſu importe de eſte modo.

2341°+2′ +9″ +6‴
67

16387

por 2341°) 14046

por 1′) .... 22 + 1/3
por 1′) .... 22 + 1/3
por 6″) .... 11 + 1/6
por 3″) .... 05 + 1/3
por 6‴) 0 8/9

Impte totàl. 156909. rs. + 3/54 de real.

SCHO-

SCHOLIO II.

161 A eſte tenor ſe pueden reſolver otros varios exemplares para exercicio de las reglas dadas : los reſueltos pueden dàr ſuficiente luz en eſta materia, por lo que omito ſer mas prolixo.

SECCION III.

DE LAS PRINCIPALES propriedades del Circulo, y de las Figuras regulares.

PROPOSICION XLI.

THEOREMA. (Fig. 72.)

162 *LA recta* CF, *que paſſando por el centro* C *divide por medio una Cuerda* AB, *es perpendicular à ella; y ſi es perpendicular à ella la divide por medio.*

DEMONSTRACION.

1. Tiradas las rectas CA, CB los triangulos AFC, BFC tienen AC = BC por radios (31), AF = FB por ſupoſicion: CF, comun, luego ſon totalmen-

te iguales, (67) por conſiguiente los angulos en F, iguales, (47) luego rectos, y la CF perpendicular ſobre AB. (24)

2. Suponiendoſe AC=BC (31), ſeràn los angulos ſobre la Vaſe iguales(63), y concediendoſe CF perpendicular ſobre AB, los angulos en F ſeràn iguales por rectos (52): luego los triangulos ACF, BCF ſon totalmente iguales (79), de que reſulta AF=FB. (47) Que es lo que ſe havia de demoſtrar. (*Es la 3. del lib. 3. de los Elementos de Euclides*)

COROLARIO I. (Fig. 72.)

163 La miſma perpendicular CF prolongada haſta la circumferencia, divide el arco AB en dos partes iguales en D; pues los angulos en C reſultan de la demoſtracion iguales, por conſiguiente ſus medidas AD; BD. (125)

CO-

COROLARIO II. (Fig.72.)

164 Para *dividir un arco* ADB *en dos partes iguales*, tireſe la cuerda AB, y dividida en dos partes iguales en F (104), levanteſe en eſte punto la perpendicular FD (105), que dividirà el arco ADC, en dos partes iguales (163). (*Es la* 30. *del* 3. *Eucl.*)

COROLARIO III. (Fig.72.)

165 *Si en la mitad* F *de una cuerda* AB *ſe levanta una perpendicular* FC *en algun punto de ella eſtarà el centro del circulo.* (162)

COROLARIO IV. (Fig.73.)

166 *Para hallar el centro* C *de un circulo*, tirenſe dos cuerdas AB, AD, y dividanſe en dos partes iguales en F, y

en G, (104) en cuyos puntos, ſe levantaràn las perpendiculares FC, GC (105): Digo, que el punto C en que ſe corten, es el centro; pues en FC ſe halla el centro, y en GC tambien (165): luego es la comun ſeccion C. (54) (*Es la* 1. *del* 3. *Eucl.*)

COROLARIO V. Fig.73.)

167 Para *concluìr un circulo dado un arco* DAB, tirenſe dos cuerdas AB, AD, y haciendo la operacion antecedente, el punto C ſerà el centro (166) deſde el qual ſe puede concluìr el circulo (58). (*Es la* 25. 3. *Eucl.*)

COROLARIO. VI. (Fig.73.)

168 Para *paſſar un circulo por tres puntos* DAB *que no eſtàn en linea recta*, ſe uniràn con las rectas DA, AB, y ſe harà la operacion antecedente para tener el centro C del circulo (166).

CO-

COROLARIO VII. (Fig.74)

169 Para *circunſcribir un circulo à un triangulo* DAB, ſe harà igual operacion, y con ella ſe tendrà el centro C del circulo. (166)

COROLARIO VIII. (Fig.74.)

170 *Por tres puntos* BAD, *que no eſtèn en linea recta, no puede paſſar ſino una miſma circunferencia*, como ſe puede inferir de las conſtrucciones referidas en los Problemas anteriores. (166)

COROLARIO IX.

171 *Dos circunferencias*, pues, *ſolo ſe pueden cortar en dos puntos*, reſpecto que ſi tuvieran tres puntos comunes, los tendrian todos. (170) *Es la* 10. *del* 3. *Euclid.*

PROPOSICION XLII.

THEOREMA. (*Fig.*75.)

172 *Las cuerdas iguales* AB,CD, *diſtan igualmente del centro* O, eſto es, que las perpendiculares OF, OG, ſon iguales (91); *y ſi diſtan igualmente del centro, las cuerdas ſon iguales.*

DEMONSTRACION.

1. Porque FB, GD, ſiendo mitades de AB,CD iguales (162), ſeràn tambien iguales; (38. *Arith.*) luego en los triangulos rectangulos FOB, ODG, los lados FB, GD ſon iguales, como tambien BO, y OD (31): los angulos en F, y en G iguales por rectos (52, 162); por conſiſiguiente ſon totalmente iguales (93) luego OF==OG. (47)

2. Suponiendoſe OF, OG perpendi-

diculares ſobre las cuerdas AB,CD, los angulos en F, y en G ſeràn rectos; y ſiendo FO=OG, como tambien OB =OD (31): los triangulos rectangulos BFO, DGO, ſeràn totalmente iguales (93) por conſiguiente BF=DG; que ſiendo mitades de BA, DC (162), eſtas ſeràn tambien iguales. (38. *Arith.*) (*Es la* 14. *del* 3. *Eucl.*)

PROPOSICION XLIII.

THEOREMA. (*Fig.*76.)

173 *De las cuerdas tiradas en un circulo, la mayor es el diametro* AB, *y la mas proxima à eſta* CE, *es mayor que la mas apartada* FG.

DEMONSTRACION.

1. Tiradas del centro las rectas OC, OE, ſe tendrà el triangulo CEO, en

que CO+OE ſon mayores que CE (103); pero AB=CO+OE (32): luego AB es mayor que CE. (28. *Arith.*)

2. Tiradas aſsimiſmo las rectas OF, OG, ſe tendràn los triangulos OCE, OFG, en que OC, OE ſon= à OF, OG (31); el angulo COE mayor que el angulo FOG, luego la Vaſe CE mayor que la Vaſe FG. (77) (*Es la* 15. *del* 3. *Eucl.*)

DEFINICION XLI. (Fig. 77.)

174 *Tangente* de un circulo es la recta CF, que tocando al circulo en un punto C prolongada no le corta, y *ſecante* ſe llama qualquier recta que corta al circulo.

PROPOSICION XLIV.

THEOREMA. (*Fig.* 77.)

175 *La perpendicular* CF *à la extremi-*

midad del diametro CE, *es tangente, y entre ella, y la circunferencia no ſe puede tirar otra recta, ſin que corte el circulo*, eſto es, *ſea ſecante.* (174)

DEMONSTRACION.

1 Del centro O tireſe qualquier recta OH, y ſe tendrà el triangulo COH, en que por ſer el angulo C recto por ſuposicion (24), el angulo H ſerà agudo; (85) por conſiguiente el lado OH opueſto al mayor angulo, ſerà mayor que el lado OC, opueſto al menor angulo (76); y ſiendo OC radio (30), ſerà OH mayor que radio: luego el punto H, y otro qualquiera de la CF, eſto es, toda la CF cae fuera del circulo.

2. Digo que otra qualquier recta CG, tirada del punto C entre la CF, y la circunferencia corta al circulo, pues baxada à ella deſde el centro O, la per-

pen-

pendicular OX (106) ſe tendrà el triangulo rectangulo OXC, en que por ſer el angulo X recto (24), y por conſiguiente mayor que XCO (25,85), el lado XO ſerà menor que CO (76); pero CO es radio (30): luego XO ſerà menor que radio, y aſsi el punto X caerà dentro del circulo: por conſiguiente la recta CX ſerà ſecante. (174) (*Es la* 16. *del* 3. *Eucl.*)

COROLARIO I. (Fig. 77.)

176 Si ſe quiere, pues, *tirar una tangente à un circulo en un punto* C *dado en ſu circunferencia*, ſe tirarà el diametro CE (56), y en el punto C ſe levantarà la perpendicular CF (105), que por lo demoſtrado ſerà tangente en C. (175)

COROLARIO II. (Fig. 77.)

177 *Si una recta* CF *fuere tangente al*

al circulo, y del centro O *al punto* C *del contacto, ſe tira un radio, eſte ſerà perpendicular à la tangente.* Pues para ſer tangente la CF debe ſer perpendicular à la extremidad del radio, ò diametro. (175) (*Es la* 18. 3. *Eucl.*)

COROLARIO III. (Fig. 77.)

178 *Si à la tangente* CF *de un circulo ſe levanta una perpendicular* CO, *en el punto* C *del contacto, eſtarà en dicha perpendicular el centro del circulo* O : pues debe ſer diametro, y en eſte ſe halla el centro. (*Es la* 19. 3. *Eucl.*)

PROPOSICION XLV.

THEOREMA. (*Fig.*78.)

179 *El angulo* BAC *formado en el centro* A *de un circulo, es duplo del* BEC *formado en la circunferencia quando los dos inſiſten ſobre un miſmo arco* BC.

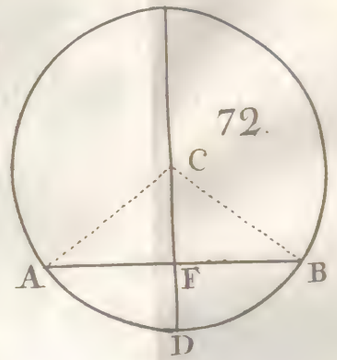
DE-

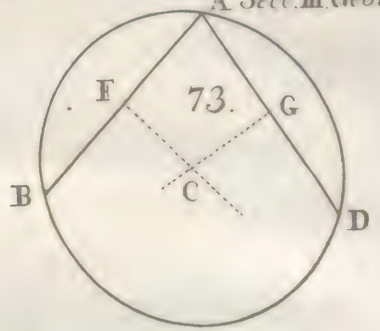
DEMONSTRACION.

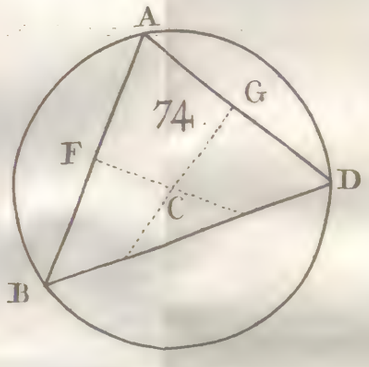
Tirado el diametro EAF, ſerà el angulo BAF por externo igual à los dos internos opueſtos (84): pero eſtos ſon iguales, por oponerſe à los lados iguales AB, AE (63): luego el angulo BAF ſerà duplo del BEF. Del miſmo modo el angulo FAC, ſerà duplo del angulo AEC: luego ſi en la Figura X al angulo BAF duplo de BEC, ſe añade el angulo FAC duplo de FEC, y en la figura Z del angulo FAC duplo de FEC, ſe reſta el angulo FAB duplo de FEB, reſultarà el angulo BAC duplo de el BEC. (149. *Arith.*) Que es, &c. (*Es la* 20. 3. *Eucl.*)

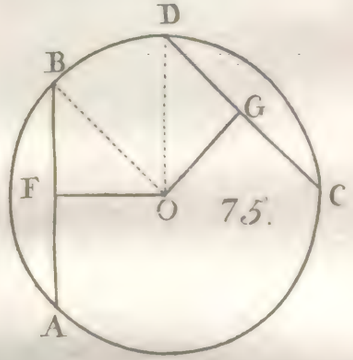
COROLARIO I. (Fig. 78.)

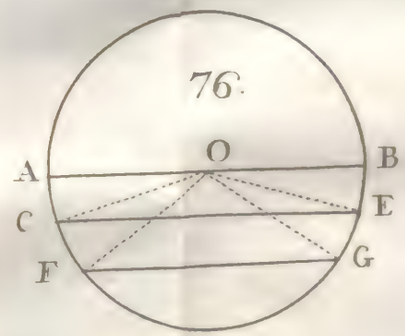
180 Siendo la medida del angulo BAC, el arco BC (130) *ſerà la medida del*

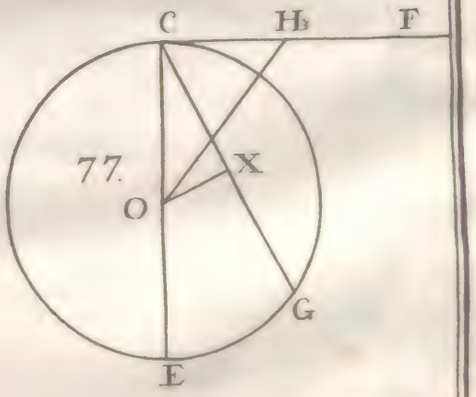

72.
C
A
F
B
D


F
73.
G
C
B
D


A
74.
G
F
C
B
D


D
B
G
F
O
75.
C
A


76.
O
A
B
C
E
F
G


C
H
F
77.
X
O
G
E

del angulo BEC *formado en la circunferencia la mitad del valor del arco* BC *sobre que insiste.* (125)

COROLARIO II. (Fig.79.)

181 *Los angulos* BEC *formados en la circunferencia de un circulo, que insisten sobre un mismo arco* BC, *son iguales; pues todos tienen por medida* la mitad del arco BC sobre que insisten. (125. 180. (*Es la* 21. 3. *Eucl.*)

COROLARIO III. (Fig.80.)

182 *En las figuras quadrilateras inscriptas en los circulos, los angulos opuestos* AE, *son iguales à dos rectos* (180; pues el angulo A, y el E insisten sobre toda la circunferencia del circulo valor de quatro rectos. (133) (*Es la* 22. 3. *Eucl.*)

CO-

COROLARIO IV. (Fig.81.)

183 *El angulo* ABC *formado en el ſemicirculo, es recto*, porque tiene por medida la mitad del otro ſemicirculo ſobre que inſiſte (180), valor de dos rectos (134): *El angulo* FBG, *que inſiſte ſobre un ſegmento* FACG *mayor que ſemicirculo, es obtuſo*; *y el angulo* HBK, *que inſiſte ſobre un ſegmento menor que ſemicirculo, es agudo*; pues el primero tendrà por medida un arco mayor que el quadrante, y el ſegundo un arco menor que quadrante. (*Es la* 31. 3. *Eucl.*)

COROLARIO V. (Fig.82.)

184 Para *tirar*, pues, *una tangente à un circulo deſde un punto* A *dado fuera*, ſe tirarà la recta AC deſde el punto A, haſta el centro C; ſobre ella formeſe el ſemicirculo ABC, y al punto B tireſe la rec-

recta AB, que serà tangente, pues el angulo ABC se halla en el semicirculo, luego es recto (183), por consiguiente AB tangente. (175) (*Es la* 17. 3. *Eucl.*)

PROPOSICION XLVI.

THEOREMA.

185 *En los circulos iguales, los angulos iguales insisten sobre iguales arcos, ya sean formados en el centro, ò en la circunferencia.*

DEMONSTRACION.

Porque si estàn en el centro sus medidas, que son los arcos sobre que insisten, deben ser iguales (125); y si estàn en la circunferencia, la medida de qualquiera es la mitad del arco en que insiste; luego si las mitades deben ser iguales (125), los todos lo serán tambien. (*Es la* 26. 3. *Eucl.*)

CO-

COROLARIO.

186 *En los circulos iguales, los angulos que inſiſten ſobre iguales arcos, ſon iguales; bien ſea que eſtèn formados en el centro, ò en la circunferencia.* Pues ſi las medidas ſon iguales, las cantidades lo ſeràn tambien. (125) (*Es la 27. del 3. Eucl.*)

PROPOSICION XLVII.

THEOREMA.

187 *En los circulos iguales, las cuerdas iguales cortan arcos iguales.* Es axioma, y no neceſsita demoſtracion. (*Es la 28. 3. Eucl.*)

COROLARIO.

188 *En los circulos iguales, los arcos iguales correſponden à cuerdas iguales.* (*Es la 29. 3. Eucl.*)

PRO-

PROPOSICION XLVIII.

THEOREMA. (*Fig.*83.)

189 El angulo BAC, que forma la tangente AB de un circulo con la secante AC, es igual al angulo AEC, formado en el otro segmento.

DEMONSTRACION.

Dado el caso que la recta AE passe por el centro, el triangulo ACE serà rectangulo en C (183); luego los angulos EAC, CEA, valdràn otro recto (85): y siendo el angulo EAB tambien recto, serà el angulo EAB igual à los angulos EAC, CAE (28. *Arith.*) quitando de ambas partes el comun EAC, quedarà el angulo BAC igual al angulo AEC. (30. *Arith.*)

Lo mismo se demuestra si la recta

AE, no paſſa por el centro, como la AF, en cuyo caſo, ſiendo el angulo AFC== AEC (181), ſerà tambien==BAC. (28. *Arith.*)

Tambien ſe demueſtra, que el angulo obtuſo DAC de la tangente, y la ſecante, es igual al AMC formado en el ſegmento alterno; pues como los angulos en A ſean iguales à dos rectos (68) aſsi como los angulos en E, y en M (182); ſi de una parte quitamos el angulo BAC, y de la otra parte el angulo AEC, que ſe han demoſtrado iguales, quedaràn los angulos DAC, AMC iguales. (*Es la* 32. 3. *Eucl.*)

DEFINICION XLII.

190 *Figura regular* es aquella que tiene todos ſus lados, y angulos iguales.

PRO-

PROPOSICION XLIX.

THEOREMA. (Fig. 84.)

191 *Si la circunferencia de un circulo ſe divide en diferentes partes iguales, y las diviſiones ſe unen con cuerdas, la figura* AB. CD *reſultante, es regular.*

DEMONSTRACION.

Siendo por ſupoſicion iguales los arcos, lo ſeràn entre sì tambien las cuerdas, ò lados de la Figura (188); y como qualquier angulo inſiſte ſobre igual numero de arcos iguales, ſeràn tambien iguales (29. *Arith.*); eſto es, que los angulos A, B, C, D, ſon iguales entre sì; luego la Figura es regular. (190)

DEFINICION XLIII. (Fig. 84)

192 Si del centro O del circulo ſe

tiran rectas à los angulos ; el angulo AOC formado en el centro del circulo, è inſiſtente ſobre uno de los lados AC de la figura , ſe dice *angulo del centro de la figura* ; el angulo ABD formado de dos lados , *angulo de la figura* ; y el que forma el radio OB con el lado AB , *ſemiangulo de la figura* , pues es la mitad del ABD , como es facil percibir.

COROLARIO I. (Fig. 84.)

193 Para *hallar el angulo* AOC *del centro* , partanſe 360°. por el numero de lados de la figura , y el quociente darà el numero de grados del angulo.

COROLARIO II. (Fig. 84.)

194 Para *hallar el angulo de la figura* ſe doblarà el numero de lados , y de eſte doble ſe reſtarà 4 ; ſe partirà el reſiduo convertido en grados por el numero de

an-

angulos, ò lados de la figura, con lo que el quociente ſerà el valor del angulo de eſta; pues tiradas deſde el centro à los angulos rectas, reſultan tantos triangulos, como lados tiene la figura, cuyos angulos de cada uno valen dos rectos (84); por conſiguiente todos los angulos de eſtos triangulos valdràn tantos rectos, como fuere el doble del numero de lados; y como los angulos formados en el centro O valen 4. rectos (70) ſi ſe reſtan, en el reſiduo ſe tendrà el valor de los angulos de la figura ABCD: multipliquenſe, pues, por 90°. y el producto partido por el numero de angulos, ò lados, darà el valor de cada uno.

COROLARIO III. (Fig. 84.)

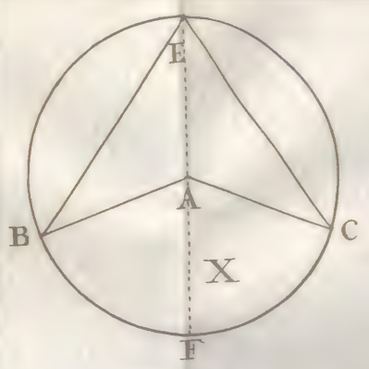
195 Para *deſcribir ſobre una recta* AB *qualquier Poligono*, ſe hallarà el angulo de la figura (194), y tomando ſu mitad, à cada eſtremo A, y B, ſe harà un

angulo igual al ſemiangulo de la figura, con lo que las rectas AO, BO daràn el centro O del circulo (192), donde traſladando la AB, ſe tendrà formada la figura pedida ſobre AB.

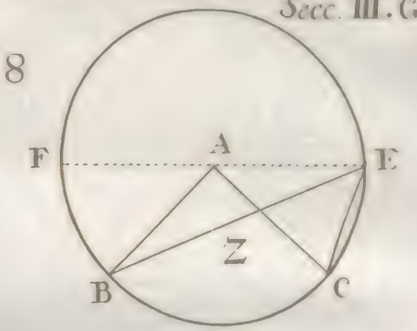
EXEMPLO I. (Fig. 85.)

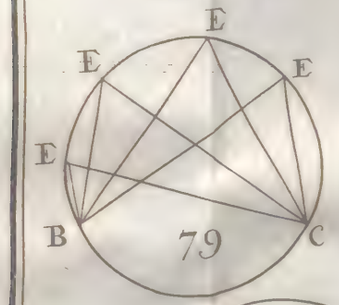
Para *deſcribir un Pentagono* dobleſe el numero de ſus lados, y darà 10; de 10 reſteſe 4, y quedan 6; multipliqueſe 6 por 90°, y ſe tendrà el producto 540°: partaſe 540°. por 5, y el quocien- 108° ſerà el angulo de la figura, y ſu mitad 54 el ſemiangulo del Pentagono: hagaſe, pues, en A, y en B con el ſemicirculo un angulo de 54° con las rectas AO, BO, las quales determinaràn el centro O; deſde el qual con la diſtancia OA ſe deſcribirà un circulo, y en èl ſe podrà acomodar cinco veces el lado AB, por conſiguiente la figura ſerà pentagono regular.

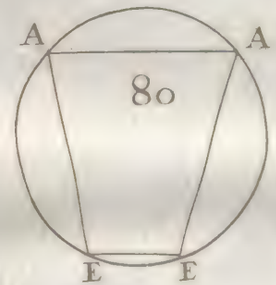
EXEM-

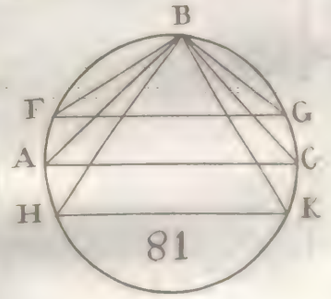

E
A
B
C
X
F

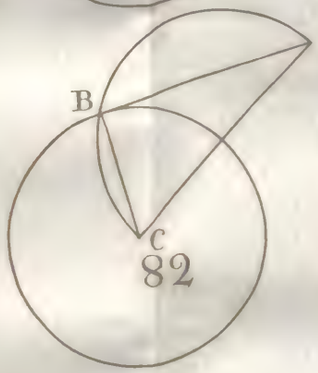
78

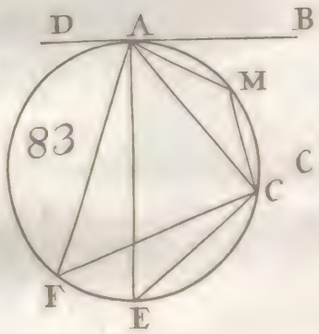

F
A
E
Z
B
C

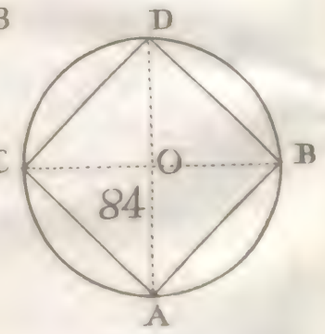

E
E
E
E
B
79
C


A
A
80
E
E


B
F
G
A
C
H
K
81


A
B
C
82


D
A
B
M
83
C
F
E


D
C
O
B
84
A

EXEMPLO II. (Fig. 86.)

Para *deſcribir ſobre una recta* AB *un exagono*; ſe doblarà el numero 6 de ſus lados, y reſultaràn 12: de 12 reſtenſe 4; y el reſiduo 8 multipliqueſe por 90°, que dà 720°: partanſe 720° por 6, y el quociente 120° ſerà el angulo del exagono, cuya mitad 60° dà el ſemiangulo del miſmo exagono: formaſe, pues, à una, y otra parte de la recta AB un angulo igual à 60°, con lo que las rectas AO, BO determinaràn el centro del circulo, donde la AB trasladada cabrà ſeis veces, y la figura que reſulte, ſerà exagono regular.

COROLARIO IV. (Fig. 86.)

196 De la formacion del exagono acabada de dàr, ſe deduce, que el triangulo AOB es equilatero (66); eſto es, que *el lado del exagono es igual al ra-*

dio de ſu circulo correſpondiente. (Es la 16. del 4. Eucl.)

COROLARIO V. (Fig. 86.)

197 Eſto facilita el ſiguiente modo cientifico de *deſcribir ſobre una recta* AB *un exagono regular.* Sobre AB formeſe un triangulo equilatero ABO, y el angulo O determinarà el centro del circulo.

SCHOLIO.

198 Solo hay methodo cientifico para la deſcripcion ſobre una recta del triangulo, quadrado, y exagono, ſegun queda demoſtrado, y tambien para el Pentagono, y Decagono, como demueſtra Euclides; lo que noſotros omitirèmos haſta el Algebra, donde con mas facilidad ſe comprehenderà ſu fundamento.

DEFINICION XLIV.

199 *Figura inſcripta* en un circulo, ſe dice aquella cuyos angulos tocan la circunferencia del circulo, en cuyo caſo el circulo ſe dice circunſcripto à la figura.

COROLARIO I.

200 Para *inſcribir en un circulo una figura regular*, ſe hallarà el angulo del centro (193); y en el centro del circulo ſe harà un angulo igual al referido, con lo que el arco ſerà correſpondiente à la cuerda, ò lado que ſe pide.

EXEMPLO. (Fig. 87.)

Para *inſcribir en el circulo un Pentagono*, partanſe 360° por 5, y el quociente 72° ſerà el angulo al centro del Pen-

Pentagono: hagaſe, pues, en O un angulo de 72°. y el arco AB, que corta, ſerà la quinta parte de toda la circunferencia, por conſiguiente el lado AB ſerà el lado del Pentagono, el qual repetido en la circunferencia, formarà un Pentagono regular inſcripto al circulo.

SCHOLIO I.

201 Para inſcribir el exagono cientificamente, ſe paſſarà el radio en la circunferencia, y cabrà ſeis veces (196); para el triangulo equilatero ſe tiraràn cuerdas de cada dos lados del exagono; para inſcribir el quadrado, ſe tiraràn dos diametros, que ſe corten en angulos rectos, y uniendo ſus eſtremos con cuerdas, quedarà inſcripto el quadrado. Euclides demueſtra tambien la inſcripcion del Pentagono, Decagono, y figura de 15 lados, que darèmos noſotros igualmente en el Algebra.

SCHO-

SCHOLIO II.

202 Biſecando los arcos, aſsi del quadrado, como del exagono, ſe podràn tambien inſcribir cientificamente las figuras de 8 lados, y de 12, biſecando los arcos de eſtas ſe podràn inſcribir las figuras de 16, y 24 lados, y aſsi por continua biſeccion otras figuras.

SCHOLIO III.

203 A excepcion del triangulo, quadrado, pentagono, exagono, decagono, y figura de 15 lados, y las que reſultan por la continua biſeccion de los arcos de eſtas, no hay methodo geometrico para la inſcripcion de las demàs figuras, por lo que ſe ha dado el referido methodo general, que las comprenda à todas, y que es el que baſta en la practica.

COROLARIO II. (Fig. 87.)

204 Para circunſcribir un circulo à una figura regular dada, por exemplo un pentagono: dividanſe dos de ſus lados por medio en K, y en L, con las perpendiculares KO, LO, que determinaràn el centro O del circulo, que paſſe por todos los angulos: pues los triangulos EKO, OKC, ſon totalmente $\overset{s}{=}$ teniendo, como tienen CK=KE, KO comun; y los angulos en K rectos: luego CO=OE. (62, 47) Del miſmo modo ſe probarà tambien, que EO=OD=OB=OA; luego el circulo que paſſe por E, paſſarà tambien por los demàs angulos (31), eſto es, la figura eſtarà inſcripta al circulo, ò el circulo circunſcripto à la figura. (199)

DEFINICION XLV.

205 Figura circunſcripta à un circulo,

lo, es aquella, cuyos lados tocan la circunferencia del circulo.

COROLARIO I. (Fig. 82.)

206 Para circunſcribir à un circulo una figura regular, por exemplo, un Pentagono: inſcribaſe en el circulo un Pentagono, y por ſus angulos tirenſe tangentes, con lo que la figura reſultante ſerà un pentagono regular circunſcripto al circulo; pues los triangulos COF, FOD, tienen CO=OD (31); OF comun, y los angulos en C, y en D rectos (176), luego ſon totalmente iguales (93) por conſiguiente CF=FD (47): el angulo CFO=FOD, eſto es, el angulo CFD duplo de CFO, y tambien el angulo COF=FOD, eſto es, el angulo COD duplo de COF (47). Del miſmo modo ſe demoſtrarà, que el angulo CEA es duplo de CEO, y el angulo COA duplo de COE.

Los angulos COE, COD ſon igua-

les

les por angulos al centro de figura regular (192); luego ſus mitades COE, COF, lo ſeràn tambien (38. *Arith.*); por conſiguiente en los triangulos rectangulos ECO, COF, ſe tiene CO comun, y los angulos EOC, COF, luego ſon totalmente iguales (79): de que ſe infiere ſer EC=CF, y el angulo CEO=CFD(47): es, pues, la EF dupla de CF, y del miſmo modo ſe probarà, que FK es dupla de FD; y haviendoſe demoſtrado iguales CF, FD, tambien lo ſeràn EF, FK (37. *Arith.*) Con igual fundamento ſe convencerà la igualdad de los demàs lados: luego la figura tiene ſus cinco lados iguales; que tenga tambien los angulos, ſe demueſtra facilmente, pues haviendoſe probado iguales los angulos CEO, CFO, mitades de los angulos E,F, eſtos tambien ſeràn iguales, y del miſmo modo ſe demoſtraràn iguales los demàs angulos: luego la figura circunſcripta es regular. (190)

CO-

COROLARIO II. (Fig. 89.)

207 Para inſcribir un circulo en una figura regular, por exemplo un Pentagono, dividanſe dos de ſus lados CE, ED por medio en G, y en H, deſde cuyos puntos levantenſe las perpendiculares GO, HO, que determinaràn el centro O, deſde el qual deſcripto un circulo con el radio GO, paſſarà tangente à los demàs lados, pues tirada la EO, los triangulos GOE, EOH, ſon totalmente iguales, teniendo, como tienen GE = EH; EO comun, y los angulos en G, y H rectos, luego OG = OH. (79. 47)

Los triangulos EOH, HOD ſon aſsimiſmo totalmente = pues EH = HD: HO comun, y los angulos en H ſon iguales por rectos (79), luego los angulos OED, ODE, ſon iguales (47); y ſiendo OED mitad de CED = EDB, ſerà HDO, mitad de EDB; eſto es, que HDO; ODB,

ſon

ſon iguales. Baxeſe tambien OK perpendicular ſobre DB, y ſe tendràn los triangulos OHD, DOK totalmente iguales, pues los angulos en D ſon iguales por lo demoſtrado, los angulos en H, y en K, y el lado OD comun (79); luego OK= OH (47); Del miſmo modo ſe prueba, que las perpendiculares OM, ON, ſon iguales entre sì, y à las demàs: luego el circulo que paſſe por G, paſſarà por H, por K, por M, y por N (31), y ſerà tangente à los lados, pues los angulos en eſtos puntos ſon rectos (175): por conſiguiente el circulo eſtà inſcripto en la figura, ò la figura circunſcripta al circulo. (205)

SCHOLIO. (Fig. 90.)

208 Las practicas referidas ſuponen la diviſion del ſemicirculo en ſus 180 grados: la qual ha parecido añadir aqui, y es la ſiguiente: En el centro O le-

levanteſe la perpendicular OM, con lo que los arcos AM, MB ſeràn quadrantes, y cada uno = 90° (135): Transfieraſe deſpues del radio AO deſde A haſta N; con lo que el arco AN, ſerà de 60°. (196) por conſiguiente NM de 30°; dividaſe el angulo AN en dos partes iguales en P; con lo que AP, PN, ſeràn tambien de 30°: haſta aqui todo es Geometrico: dividaſe el arco AP en tres partes iguales, lo que por no poderſe executar cientificamente, ſe hace à tantèo; y ſea una de eſtas partes AS = 10°: dividaſe por medio en R; y el arco AR à tantèo en 5 partes = $\frac{s}{}$, con lo que ſe tendrà el arco de un grado, cuya cuerda transferida en la circunferencia, darà la diviſion del ſemicirculo en ſus 180°.

SECCION IV.

DE LA RAZON, y proporcion en las Figuras Planas.

PROPOSICION L.

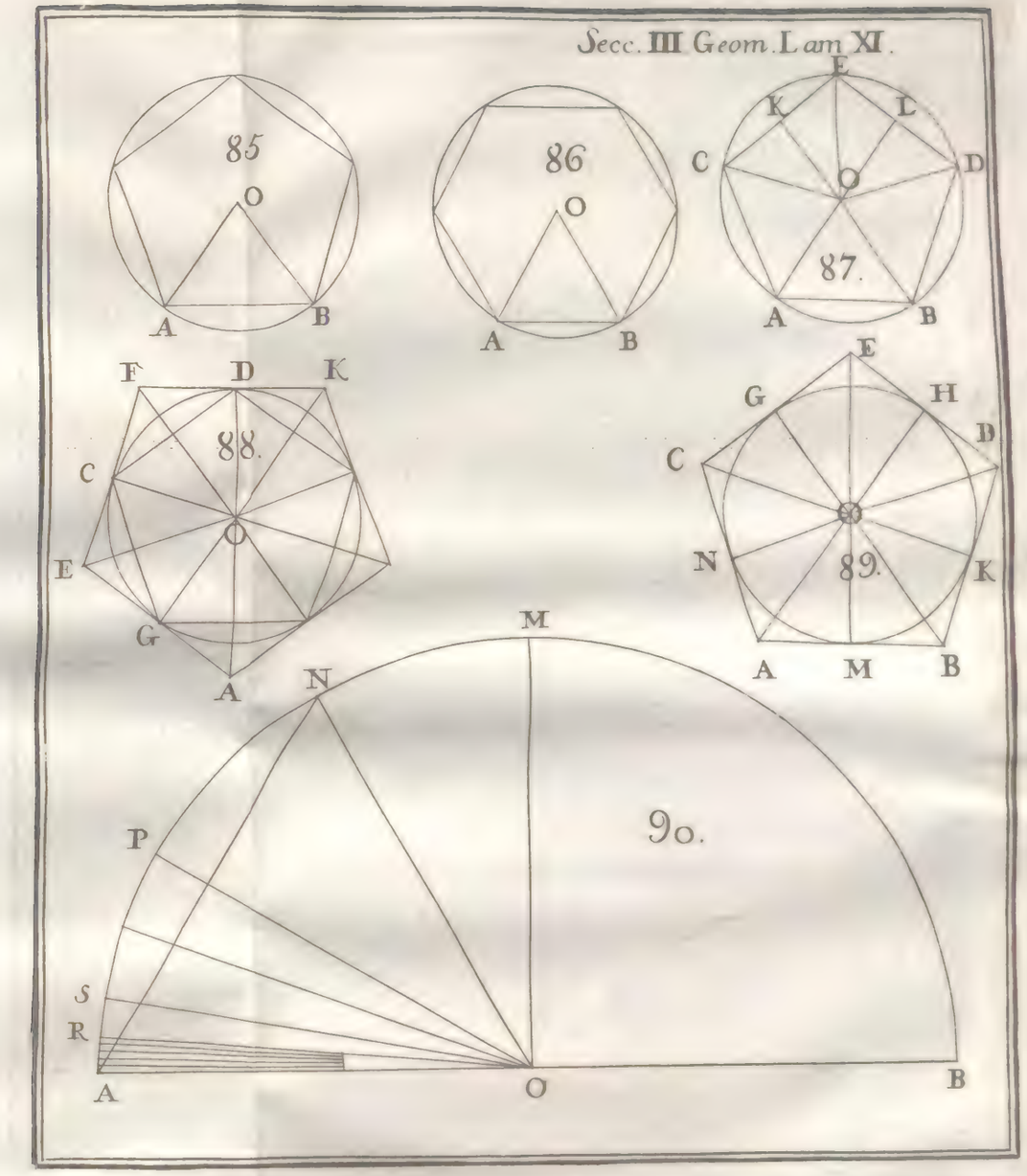
THEOREMA. (*Fig.*91.)

209 *Si en qualquier triangulo* ABC, *se tira una recta* GF *paralela à la Vaſe* AC, *dividirà los lados del triangulo en partes proporcionales, eſto es, que ſerà* AG : GB = CF : FB.

DEMONSTRACION.

Tirenſe las rectas AF, CG. Reſpecto de que los triangulos AFG, CGF, tienen una miſma Vaſe GF, y eſtàn entre unas miſmas paralelas AC, GF, ſeràn igua-

les


85
O
A
B
86
O
A
B
E
K
L
C
D
O
87.
A
B
F
D
K
88.
C
O
E
G
A
E
G
H
C
B
N
89.
K
A
M
B
M
N
P
90.
S
R
A
O
B

les (99): luego tendràn la miſma razon al triangulo tercero GBF (120. *Arith.*): eſto es, que el triangulo AFG, al triangulo GFB ſerà como el triangulo CGF al triangulo FGB: pero el triangulo AFG al triangulo GFB por tener una miſma altura, es como la Vaſe AG à la Vaſe GB; y el triangulo CGF al triangulo FGB, por tener una miſma altura, es como la Vaſe CF à la Vaſe FB (143): luego la razon de AG à GB, ſerà tambien la miſma, que de CF à FB (122. *Arith.*) Que es, &c. (*Es la 2. 6. Eucl.*)

COROLARIO I. (Fig. 92.)

210 Para *tomar de una recta* AB *la parte que ſe quiera.* Por exemplo, la tercera parte. Sobre la AB en el extremo A, tireſe la arbitraria AC, formando un angulo no muy agudo BAC, tomeſe la AD à voluntad, y transfieraſe tres veces en AC por exemplo haſta F. Tireſe FB,

y por D la DE, paralela à FB, con lo que ſe tendrà AE tercera parte de AB; pues por ſer paralelas DE, FB, ſerà FD: DA==BE: EA, (209) y componiendo FA: DA==BA: EA (145. *Arith.*): pero FA, es tripla de DA por conſtruccion: luego BA ſerà tripla de EA, eſto es EA la tercera parte de BA. (*Es la 9. del 6, Eucl.*)

SCHOLIO.

211 Correſponde eſta propoſicion en la Geometria à lo que el partir en la Arithmetica; y aſsi para tomar la tercera parte de 15, ſe parte 15 por 3, y el quociente 5 es la parte que ſe buſca.

COROLARIO II. (Fig. 93.)

212 *Para dividir una recta dada* AB *en la razon que eſtuviere otra* AF *dividida en* D. Formeſe de las dos un angulo BAF no muy agudo, y tirada la FB, y por D,

la

la DE paralela à FB ſe tendrà la AB dividida en E, en la miſma razon que AF lo eſtà en D : pues FD : DA = BE : EA (209) y componiendo AF : AD = AB : AE. (145. *Arith.*) (*Es la* 10. 6. *Eucl.*)

SCHOLIO I.

213 Para dividir un numero 196. por exemplo en la razon de 2 à 5, que ſe ſupone 7 dividido ; ſe dirà ſi 7 dán 2 ; 196 daràn $\frac{196.2}{7} = 28.2 = 56$. Tambien ſe dirà ſi 7 dàn 5 ; 196 daràn $\frac{196.5}{7} = 28.5 = 140$: con lo que ſe tendrà el numero 196 dividido en 56, y 140, que ſon entre sì en la razon de 2 à 5.

SCHOLIO II.

214 Queriendo dividir el miſmo numero 196. en tres partes, que guarden entre sì la razon de 1, 2, y 3, ſe ſumaràn eſtos numeros, y con ſu ſu-

ma 6 ſe haràn eſtas reglas de tres.

$6 : 1 = = 196 : \frac{196}{6} = = 32 + \frac{2}{3}$

$6 : 2 = = 196 : \frac{196\,2}{6} = = \frac{196}{3} = = 65 + \frac{1}{3}$

$6 : 3 = = 196 : \frac{196\,3}{6} = = \frac{196}{2} = = 98$

De ſuerte, que las partes del numero ſeràn $32+\frac{2}{3}$, $65+\frac{1}{3}$, y 98, las quales ſon entre sì como 1, 2, y 3.

COROLARIO III. (Fig. 94)

215 *Para hallar una tercera proporcional à dos rectas* M, N; formeſe un angulo no muy agudo BAE, y en èl ſe harà AE = = M; ED = = N = = AG : tireſe GE, y por D, la DK paralela à GE, con lo que GK ſerà la tercera proporcional, que ſe pide, pues AE : ED = = AG : GK. (*Es la* 11. 6. *Eucl.*)

COROLARIO IV. (Fig. 95.)

216 Para *hallar una quarta proporcional*

nal à tres rectas dadas M, N, O. Formese un angulo BAC no muy agudo, y hagase AE=M; ED=N; AG=O; tirese GE, y por D la DK paralela à EG, con lo que GK serà la quarta proporcional, pues AE: ED=AG: GK. (209) (*Es la* 12. 6. *Eucl.*)

SCHOLIO.

217 Para hallar un numero tercero, ò quarto proporcional, queda dicho en la Arithmetica, por lo que omitimos repetirlo aqui.

PROPOSICION LI.

THEOREMA. (*Fig.* 96.)

218 *Si en qualquier triangulo* ABC *se divide un angulo* B *en dos partes iguales con una recta* BD, *esta dividirà la Vase* AC *en segmentos proporcionales à los lados del*

triangulo, eſto es BC: BA==CD: DA.

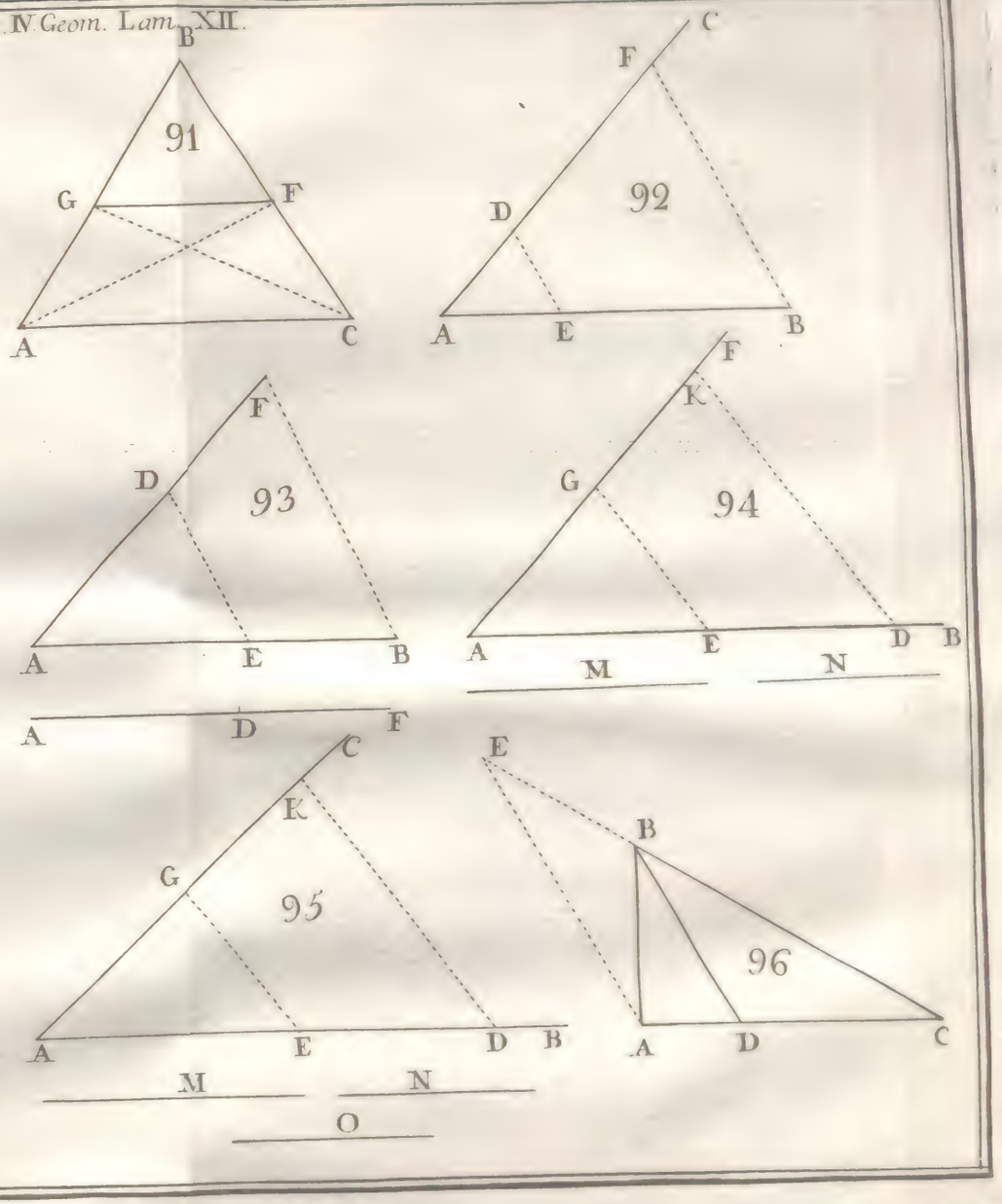
DEMONSTRACION.

Prolongueſe CB haſta E, de ſuerte, que BE ſea==BA; tireſe AE: con lo que en el triangulo Iſoſceles ABE los angulos ſobre la Vaſe AE ſeràn iguales (63); pero ABC por externo, es igual à eſtos miſmos angulos ſobre la Vaſe AE (84); luego ſerà duplo de qualquiera de ellos EAB: el angulo ABC es aſsimiſmo duplo del angulo ABD, por ſupoſicion: luego los angulos ABD, EAB ſeràn iguales (38. *Arith.*), y por ſer alternos, las AE, DB, ſeràn paralelas (80): por conſiguiente (209) en el triangulo ACE ſerà CB: BE==CD: DA; eſto es CB: BA== CD: DA, por ſer EB==BA.

DEFINICION XLVI. (Fig. 97.)

219 *Figuras ſemejantes* ABC, *abc*, ſon

Secc. IV. Geom. Lam. XII.



ſon aquellas, que teniendo ſus angulos A=a; B=b; C=c, tienen proporcionales los lados, que comprenden angulos iguales, de ſuerte, que los antecedentes, aſsi como los conſequentes, ſe opongan à angulos iguales; eſto es, que ſea AC à CB, como *ac*, opueſto al angulo *b*=B, à *cb*, opueſto al angulo *a*=A; y aſsi de los otros lados.

DEFINICION XLVII. (Fig. 97.)

220 Los lados AC, *ac*, opueſtos à iguales angulos, ſe llaman *homologos*.

COROLARIO.

221 *Todas las figuras regulares deſde el triangulo equilatero al infinito, ſon ſemejantes*; pues tienen ſus angulos iguales, y los lados, que los comprenden, proporcionales en razon de igualdad.

PRO-

PROPOSICION LII.

THEOREMA. (Fig. 98.)

222 *Los triangulos* ABC: *abc equiangulos, ſon ſemejantes.*

DEMONSTRACION.

Por ſuponerſe el angulo B=*b*, ſobrepueſtos, ſe ajuſtaràn cayendo el punto *a* en D, y el punto *c* en E (51); eſto es, todo el triangulo *abc* en DBE; y reſpecto de que los angulos en D, y en E, ſon iguales à los angulos en A, y en C, la DE ſerà paralela à AC (81); luego AD: DB=CE: EB (209), y componiendo BA: BD=BC: BE (145. *Arith.*) y alternando BA: BC=BD: BE (142. *Arith.*): Lo miſmo ſe demueſtra en otro qualquier angulo; luego los referidos triangulos ABC, y DBE, ò bien *abc* tienen

nen proporcionales los lados, que comprenden angulos iguales, por consiguiente son semejantes. (219) (*Es la 4. 6. Eucl.*)

COROLARIO I. (Fig. 98.)

223 *Si en un triangulo* ABC *se tira una recta* DE *paralela à un lado* AC, *cortarà un triangulo* DBE *semejante al total* ABC.

COROLARIO II. (Fig. 98.)

224 *Si dos triangulos* ABC, *abc, tienen dos angulos* A, C, *del uno iguales à dos, a, c, del otro, serán semejantes*, pues con esté supuesto el tercero B resulta igual al tercero *b* (88): esto es, resultan equiangulos.

COROLARIO III. (Fig. 98.)

225 Para *construir un triangulo seme-*

jan-

jante à otro ABC *ſobre una recta dada ac*, ſe formaràn en los eſtremos *a*, y *c* dos angulos iguales à ſus correſpondientes A y C: con lo que los triangulos ABC, *abc*, ſeràn ſemejantes. (224)

PROPOSICION LIII.

THEOREMA. (*Fig.99.*)

226 *Si dos triangulos* ABC, *abc*, *tienen proporcionales ſus lados, ſeràn ſemejantes.*

DEMONSTRACION.

En los puntos *a*, y *c* de la recta *ac* haganſe dos angulos iguales à los A, y C, con lo que las rectas concurriràn en D, (74) y los triangulos ABC, *ac*D, ſeràn ſemejantes (224): luego AC: CB = *ac*; *c*D (219); pero por ſupoſicion AC: CB = *ac*: *cb*; luego *ac*: *c*D = *ac*: *cb* (122. *Arith.*)

Arith.); por consiguiente CD=*cb*. (121. *Arith.*) Del mismo modo se prueba *a*D =*ab*: luego los triangulos *abc*, *ac*D, son totalmente iguales (67): luego equiangulos (47): pero por construccion los triangulos ABC, *ac*D, son equiangulos: luego los triangulos ABC, *abc*, lo serán tambien: por consiguiente semejantes. (222) (*Es la 5. del 6. Eucl.*)

COROLARIO I. (Fig. 99.)

227 *Si de tres rectas ac, cb, ab, proporcionales à los tres lados de un triangulo* AC, CB, AB, *se construye un triangulo abc, ambos serán semejantes.*

COROLARIO II. (Fig. 99)

228 *Para construir un triangulo semejante à otro* ABC *sobre una recta dada, ac*: à las rectas AC, CB, y *ac*, se hallará una quarta proporcional *cb*, con la qual des-

de

de *b*, se harà un arco; asimismo à las rectas AC, AB, y *ac*, se hallarà la quarta proporcional *ab*, con la qual desde *a* se harà un arco, que corte el antecedente en *b*, y tirando las rectas *ba*, *bc*, el triangulo *abc* serà semejante al propuesto ABC. (227)

PROPOSICION LIV.

THEOREMA. (Fig. 98.)

229 *Si dos triangulos* ABC, *abc, tienen un angulo* A *igual à un angulo a, y los lados que los comprenden proporcionales*; esto es BA : AC = *ba* : *ac* : *los triangulos son semejantes.*

DEMONSTRACION.

En *a* hagase un angulo *ca*D = A, que por consiguiente serà = *bac*; hagase tambien en C un angulo *ac*D = C, con

lo

lo que las rectas concurriràn en D (74); y los triangulos ABC, *ac*D, ſeràn ſemejantes (224): luego BA : AC = *a*D : *ac* (219): pero por ſupoſicion BA : AC = *ba* : *ac*, luego *a*D : *ac* = *ba* : *ac* (122. *Arith.*) : luego *a*D = *ba* (121. *Arith.*) : teniendo, pues, los triangulos *abc*, *ac*D, los dos lados del uno *ba*, *ac* iguales à dos del otro *a*D, *ac*, y los angulos comprendidos iguales, ſeràn totalmente iguales (62); por conſiguiente equiangulos (47); pero los triangulos ABC, *ac*D, lo ſon por conſtruccion; luego tambien lo ſeràn los triangulos ABC, *abc*: luego ſemejantes. (222)

COROLARIO. (Fig. 99.)

230 *Para conſtruìr un triangulo ſemejante á otro dado* ABC *ſobre una recta ac*, ſe formarà en *a* un angulo *cab* = A, y à los lados AC; AB, y *ac*, ſe hallarà la quarta proporcional *ab*, con lo que tirando

do *bc*, ſe tendrà el triangulo *abc* ſemejante al propueſto. (*Es la* 6. 6. *Eucl.*)

PROPOSICION LV.

THEOREMA. (*Fig.* 99.)

231 *Si dos triangulos* ABC, *abc, tienen dos lados* AC, CB, *del uno proporcionales à dos del otro ac, cb; y de los angulos opueſtos fueſſen iguales los* A, *y a, y los* B, *y b, ambos agudos, ò ambos obtuſos, los triangulos ſeràn ſemejantes.*

DEMONSTRACION.

Lo que ſe pretende probar, es, que en el ſupueſto de ſer los angulos B, y *b*, ambos agudos, ò ambos obtuſos, el angulo C es igual al angulo *c*; pues entonces los triangulos ſeràn ſemejantes, reſpecto de darſe el angulo A = = al angulo *a*. (224)

Sea,

Sea, pues, el angulo C mayor que el angulo *c*, y los angulos B, y *b*, ambos agudos: hagaſe el angulo DCA=*c*, con lo que los triangulos DCA, *bca*, ſeràn ſemejantes (224), y por ello AC: CD =*ac* : *cb* (219): pero por ſupoſicion *ac*: *cb*=AC: CB: luego AC: CD=AC: CB (122. *Arith.*): luego CD=CB (121. *Arith.*): luego los angulos ſobre la Vaſe B, y D, ſon iguales (63); pero el angulo ADC por igual al angulo *b*, es ſegun la ſupoſicion agudo: luego el angulo BDC ſu complemento à dos rectos ſerà obtuſo (68): por conſiguiente tambien ſerà obtuſo ſu igual B, contra lo ſupueſto.

Si los angulos B, y *b*, fueren ambos obtuſos, ſe demoſtrarà del miſmo modo ſer los angulos en B, y en D, iguales, ambos obtuſos, que es impoſsible (86): Luego el angulo C no es mayor que el angulo *c*, ni tampoco menor, como ſe puede reconocer practicando eſta

demoſtracion en el otro triangulo *abc*: por conſiguiente ſon iguales, y los triangulos ſemejantes. (224)

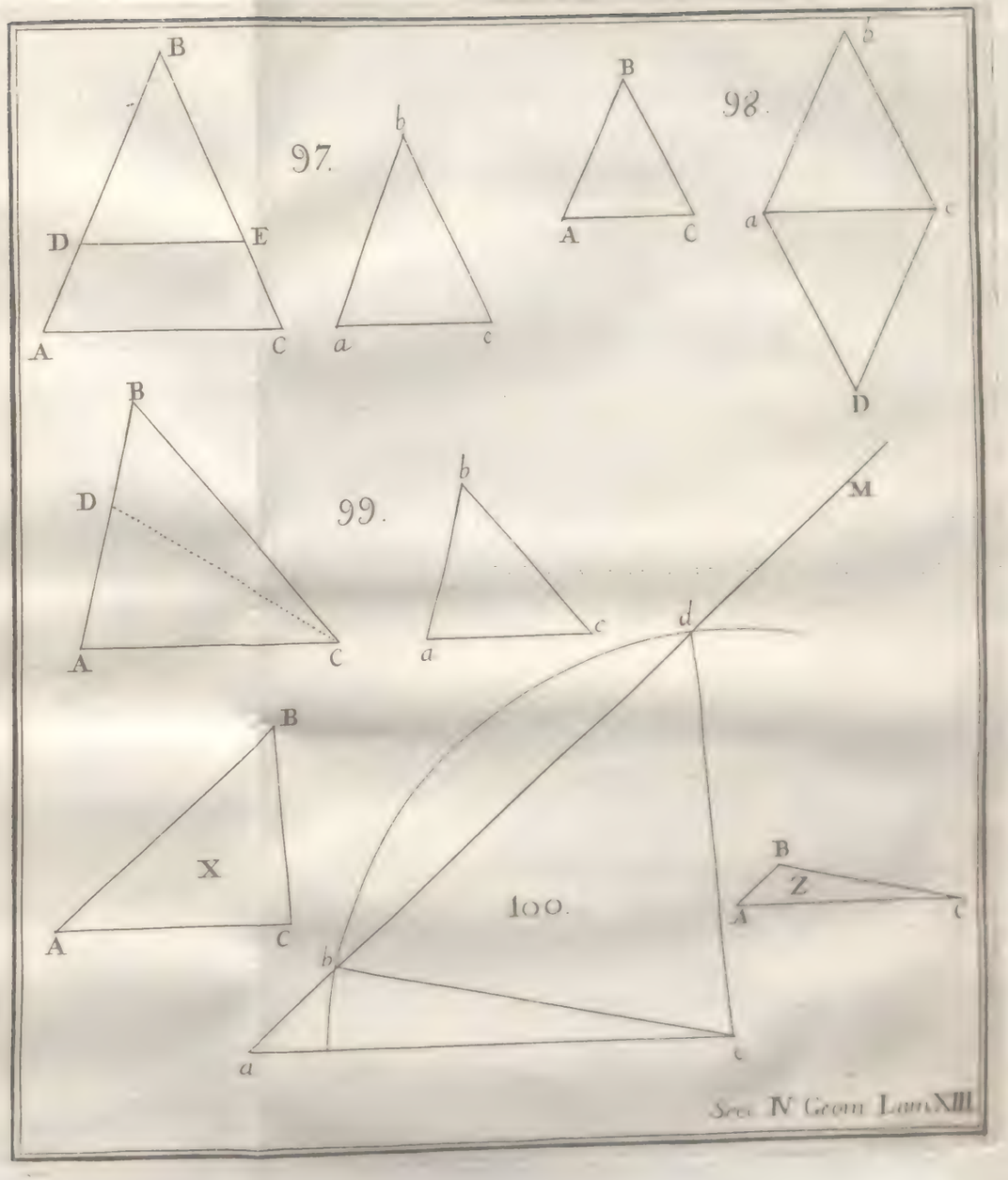
COROLARIO. (Fig. 100.)

232 Para *conſtruìr un triangulo ſemejante à otro dado* ABC, *ſobre una recta ac*, ſe harà en el eſtremo *a* un angulo igual A, y ſe hallarà una quarta proporcional à los lados AC, CB, y *ac*; que ſervirà de radio para un arco deſcripto deſde el punto *c*; y ſupueſto corte la *a*M en *b*,*d*, tirando las rectas *cb*, *cd*, ſe tendrà el triangulo *abc* ſemejante al dado ABC, ſi el angulo B fuere obtuſo; ò el *acd*, ſi el angulo B fuere agudo. (116) (*Es la* 7. 6. *Eucl.*)

SCHOLIO.

233 Las propoſiciones de la ſemejanza ſon las miſmas, que la de la igual-

dad



Sect. IV Geom. Lam. XIII.

dad total, solo con la diferencia, que la proporcion de los lados en unas, equivale à la igualdad de los mismos en las otras, segun se puede reconocer de los textos: Estas mismas sirven en la Trigonometria, segun verèmos en el Tratado de ella.

PROPOSICION LVI.

THEOREMA. (Fig. 101.)

234 *Si en un triangulo rectangulo* ABC *se baxa una perpendicular* BD *sobre el lado opuesto al angulo recto* B *llamado* Hipothenusa AC, *dividirà el triangulo total* ABC *en dos triangulos* ABD, BDC *semejantes al total, y entre sì.*

DEMONSTRACION.

En los triangulos ABD, ABC, los angulos en D, y en B son iguales por

rectos, y el angulo A es comun: luego ſon ſemejantes (224). Por la miſma razon lo ſon los triangulos BDC, ABC: luego ſon ſemejantes al total: Que lo ſean entre sì, ſe evidencia de que los angulos en D ſon rectos; el angulo ABD igual al angulo C; y el angulo DBC igual al A, ſegun reſulta de lo demoſtrado: luego ſon ſemejantes entre sì. (*Es la* 8. 6. *Eucl.*)

COROLARIO I. (Fig. 101.)

235 *La perpendicular* BD, *baxada del angulo recto, es media proporcional entre los ſegmentos* AD, DC *de la Hipothenuſa*, pues la ſimilitud de los triangulos ABD, DBC, dà AD : DB = DB : DC.

COROLARIO II. (Fig. 101.)

236 *Qualquier lado* BC *es medio proporcional entre la Hipothenuſa* AC, *y el ſegmento proximo* CD: pues la ſimilitud de

de los triangulos ABC,DBC, dà AC: CB ==CB: CD. Del miſmo modo ſe prueba, que AB es media proporcional entre AC, y ſu ſegmento proximo AD.

COROLARIO III. (Fig.102.)

237 *La perpendicular* DB *levantada de qualquier punto del diametro* D, *haſta la circunferencia, es media proporcional entre los ſegmentos* AD,DC; pues tiradas las rectas AB,BC, el triangulo ABC es rectangulo en B. (183) Del miſmo modo ſe prueba, que la cuerda BC es media proporcional entre todo el diametro, y el ſegmento DC; y que la cuerda AB, lo es tambien entre el diametro AC, y el ſegmento AD.

COROLARIO IV. (Fig.103.)

238 *Para hallar*, pues, *una media proporcional entre dos rectas dadas* X, Z,

ſe tirarà una recta indefinida, y en ella ſe tomarà AD=X; DC=Z, y ſobre toda la AC ſe formarà un ſemicirculo, con lo que levantando en D la perpendicular DB haſta la circunferencia, eſta ſerà media proporcional entre AD, y DC: eſto es, entre X, Z. (*Es la* 13. 6. *Eucl.*)

SCHOLIO.

239 Si entre dos numeros 16, y 4 ſe quiere hallar un medio proporcional, ſe multiplicarà 16 por 4, y del producto 16.4=64, ſe extraerà la raiz quadrada=8, la qual ſerà el medio que ſe buſca, como es claro.

DEFINICION XLVIII.

240 *Terminos reciprocamente proporcionales*, ſon aquellos, que el primero, y ultimo termino de la proporcion ſe hallan en una figura, y el ſegundo, y tercero en la otra.

PRO-

PROPOSICION LVII.

THEOREMA. (Fig. 104.)

241 *Los Paralelos gramos iguales* X, Z, *que tienen un angulo* D *igual, tienen reciprocamente proporcionales los lados que comprenden dicho angulo*: esto es, que CD: DE==DF: DB; *y al contrario, si tienen reciprocamente proporcionales los lados, que comprenden el referido angulo* D, *los paralelos gramos serán iguales.*

DEMONSTRACION.

Disponganse los Paralelos gramos de suerte, que CD,DE, formen una recta sola, de que se seguirà, que BD,DF formaràn otra recta, pues el angulo CDB por supoficion, es igual EDF (71). Prolonguense los lados AB,GE, hasta que concurran en H para formar el paralelogramo Y. Esto supuesto:

1. Los paralelos gramos X, Y, por tener una misma altura BD, son como sus Vases CD,DE (143) tambien los paraleloſgramos Z, Y, por la misma razon son como sus Vases FD,DB; pero por ser iguales X, Z; la razon del paralelogramo X al paralelogramo Y, es la misma, que del paralelogramo Z al paralelogramo Y (120. *Arith.*): luego la razon de CD à DE, es la misma que de FD, à DB. (122. *Arith.*)

2. Que si CD: DE = FD: DB los paralelogramos serán iguales, pues siendo la razon del paralelogramo X al paralelogramo Y, por tener una misma altura, la de la Vase CD, à DE (143), y la razon del paralelogramo Z al paralelogramo Y, la de la Vase FD à DB; y que por suposicion CD: DE = DE: DB, será X: Y = Z: Y (122. *Arith.*): luego X = Z. (121. *Arith.*) *Es la* 14. 6. *Eucl.*)

CO-

COROLARIO I. (Fig.104.)

242 *Los triangulos* CBD ; FED , *que tienen un angulo* D *igual tienen los lados, que comprenden dicho angulo reciprocamente proporcionales,* esto es, que CD: DE==FD: DB : y *si tienen estos lados reciprocamente proporcionales , los triangulos serán iguales.* Esta demostracion procede por el mismo orden , y voces , que la antecedente, haciendo la comparacion con el triangulo tercero DBE. (*Es la* 15. 6. *Eucl.*)

COROLARIO II. (Fig.105.)

243 *Si quatro rectas* CD,DE,DF,DB, *fueren proporcionales , el rectangulo* X *hecho de las extremas* CD, DB, *es igual al rectangulo* DE, DF *hecho de las medias ; y si el rectangulo hecho de las extremas fuesse igual al rectangulo hecho de las medias , las quatro rectas serán proporcionales* ; pues como sien-

ſiendo los rectangulos paraleloſgramos, que tienen un angulo igual, (y aun todos por rectos) (52), tengan por ſupoſicion reciprocamente proporcionales ſus lados; eſto es CD: DE=FD: DB, ſeràn los rectangulos iguales (241); y ſi ſon iguales, ſerà CD: DE=FD: DB. (*Es la* 16. 6. *Eucl.*)

COROLARIO III. (Fig. 106.)

244 *Si tres rectas* CD, DE, DB, *fueren proporcionales, el rectangulo* X *hecho de las extremas* CD, DE, *es igual al quadrado* Z *hecho de la media* DE; *y al contrario, ſi el rectangulo hecho de las extremas es igual al quadrado de la media, las tres rectas ſeràn proporcionales.* (*Es la* 17. 6. *Eucl.*)

SCHOLIO.

245 Correſponden eſtas dos ultimas propoſiciones à lo que de tres, y qua-

tro

tro numeros proporcionales queda demoſtrado en la Arithmetica.

COROLARIO IV. (Fig.107, 108.)

246 *Para transformar un rectangulo* AD *en otro, cuya Vaſe ſea dada*==MN, à las rectas MN, AB, y AC, ſe hallarà la quarta proporcional MO, que ſe pondrà perpendicular en M, y entonces el rectangulo NO, ſerà igual al rectangulo CB: pues MN: AB==AC: MO. (243)

COROLARIO V. (Fig.107, 109.)

247 *Para transformar un rectangulo* AD, *en un quadrado* ſe hallarà una media proporcional MN entre los lados AB, AC, y entonces el quadrado NO, ſerà igual al rectangulo BC: pues AB: MN ==MN: AC. (244)

CO-

COROLARIO VI. (Fig. 110.)

248 *Para transformar un triangulo* ABC *en un rectangulo, cuya Vase ſea la recta* MN, à las rectas MN, AC, y à la mitad de la altura BD ſe hallarà la quarta proporcional MO, que ſe pondrà perpendicular en M, y entonces el rectangulo NO, ſerà igual al triangulo ABC, pues ſiendo reciprocamente proporcionales MN, AC, $\frac{1}{2}$BD, NO, ſerà el rectangulo NO $=\frac{1}{2}$ BD. AC (243); pero $\frac{1}{2}$ BD. AC, es igual al triangulo ABC (101); luego eſte es igual al rectangulo NO. (28. *Arith.*)

COROLARIO VII. (Fig. 11.)

249 Para *transformar un triangulo* ABC *en otro, cuya Vaſe, ò altura* MN *ſea dada*: à las rectas MN, AC, y perpendicular BD, halleſe la quarta proporcional

nal MO, que ſe pondrà perpendicular ſobre MN en qualquier punto M, y entonces el triangulo MON, ſerà igual al ABC; pues ſiendo eſtos triangulos mitades de los rectangulos AC.DB, y MN. MO, que ſon iguales (243), ſeràn tambien iguales entre sì. (38. *Arith.*)

SCHOLIO I.

250 Si dada la area de una figura qualquiera, ſe quiere hallar en numeros el valor de el lado de un quadrado ſu igual, ſe extraerà la raiz quadrada del numero que repreſenta la area, y ſe tendrà el lado del tal quadrado.

SCHOLIO II.

251 Con eſte motivo dirè aqui el modo de *extraer la raiz quadrada de una cantidad de varas, pies, y pulgadas, &c.* que por no ſer lugar conveniente, ſe omi-

omitiò explicar en la Arithmetica. Sea, pues, por exemplo, que ſe quiere extraer la raiz quadrada de $78^{\circ}+6'+1''$: reduzcanſe las 78° à pies quadrados, que ſe executarà multiplicando por $9'$ quadrados, que cada una contiene, y ſe tendràn $702'$. quadrados: reduzcanſe eſtos à pulgadas quadradas, multiplicandolos por 144. que cada uno contiene, y ſerà $101088''$ quadradas; añadaſe à eſtas la pulgada corriente, que vale 36. quadradas, y ſerà en todo $101124''$. quadradas, valor de $78^{\circ}+6'+1''$.

De $101124''$. ſaqueſe la raiz, y ſe tendrà $318''$, que reducidas à pies, ſerà $318'' : 12 = 26' + 6''$; reducidos los $26'$ à varas, ſerà $26 : 3 = 8^{\circ}+2'$; de ſuerte, que la raiz es $8^{\circ}+2'+6''$

SCHOLIO III.

252 Queriendo extraer la raiz quadra-

drada de 17°+2′ +8″, ſe reducirà todo à la ultima eſpecie; lo que ſe harà multiplicando 17 por 9, y ſe tendrà 153′ quadrados, à que añadiendo 2′ corrientes iguales à 6″ pies quadrados, ſe tendrà 159′ quadrados: multipliquenſe eſtos por 144, y ſerà el producto 22896″ quadradas, à que añadiendo 8″ corrientes iguales 8″. 36 = = 288″ quadradas, ſe tendrà en todo 23184″ quadradas.

Extraìda de eſte numero ſu raiz quadrada, ſe tendrà 152″ + $\frac{26}{100}$″ que reducidas por lo que mira à 152″ ſon 4°+ó+8″: y $\frac{26}{100}$″ = = 3″ proximamente, de ſuerte, que la raiz de 17°+2′ +8″ es 4°+ó+8″ +3″ proximamente.

PROPOSICION LVIII.

PROBLEMA. (Fig. 112.)

253 *Dividir qualquier figura rectilinea*

nea ABCDE *en una razon dada*, por exemplo, en tres partes, que ſean entre sì, como 1, 2, 3.

RESOLUCION, Y DEMONSTRACION.

Supueſto que ſu area ſea = 60°: dividaſe eſte numero en tres partes, que entre sì ſean como 1, 2, y 3; y ſe tendràn 10, 20, 30. (214) De qualquier punto tomado dentro de la figura, ò en uno de ſus lados, por exemplo, E, baxeſe la perpendicular EK = v.g. à 4 varas: partaſe 10 por la mitad de 4 = 2, y el quociente 5° transfieraſe deſde A à S, y tirada la ES, el triangulo EAS ſerà = 1°, que es una parte.

Para la ſegunda parte 20, tireſe EM perpendicular, y ſupueſto ſea = 8° tomeſe ſu mitad = 4 por la qual ſe partirà 20. y el quociente 5 ſe paſſarà deſde D, en el lado DC, que ſi ſolo fueſſe = 4, ſe

ſe tirarà la EC, con lo que el triangulo EDC ſerà = 16°: Y reſpecto que faltan 4° haſta la ſegunda parte 20; ſe tomaràn eſtas aſsi; tireſe EN perpendicular = por exemplo à 6°· partaſe 4 por 3 mitad de 6, y el quociente 1°... 1′ transfieraſe deſde C, haſta O, con lo que tirando la EO, el triangulo ECO ſerà = 4; y aſsi la figura EDCO, ſerà = 20: por conſiguiente la figura EOSB ſerà = 30, y la total queda dividida en la razon dicha, como es manifieſto.

Es arbitrario, ſegun ſe puede reconocer, comenzar por una, ù otra parte de las dadas, y baxar la perpendicular ſobre el lado que ſe quiera. Pende eſto de la determinacion del Problema, en que ſea con eſtas, ù las otras condiciones.

PROPOSICION LIX.

THEOREMA. (Fig. 113.)

254 Los *Paralelosgramos* AD, EH, *y triangulos* ACB, EGF, *estàn en razon compuesta de sus Vases, y alturas.*

DEMONSTRACION.

Porque hecha la razon compuesta de la Vase AB, à la Vase EF, y de la altura CK à la altura HL, se tendrà $\frac{AB.}{EF}\frac{CK.}{HL}$ (150. *Arith.*) pero AB. CK, es igual al area del paralelogramo AD, y EF. HL es igual al area del paralelogramo EH (154): luego estos estàn en razon compuesta de sus Vases, y alturas. Lo mismo se demuestra de los triangulos, por ser mitades de los paralelosgramos.

PRO-

PROPOSICION LX.

THEOREMA. (*Fig.* 114.)

255 *Los triangulos* ABC, DEF, *que tienen proporcionales ſus Vaſes con ſus alturas*, eſto es, que AB: DE = CK: FH, *eſtàn en razon duplicada de las miſmas Vaſes, ò alturas.*

DEMONSTRACION.

Porque hecha la razon compueſta de Vaſe à Vaſe, y de altura à altura, ſe tendrà $\frac{AB}{DE}\cdot\frac{Ck}{FH}$ (150. *Arith.*); pero eſtas ſon dos razones iguales por ſupoſicion: luego la compueſta AB. CK, ED. FH, ſerà duplicada de AB à DE, ò de CK à FH (151. *Arith.*); $\frac{1}{2}$ AB. AC, es la area del triangulo ABC; $\frac{1}{2}$ EF. EG, es la area del triangulo DFE (155): luego eſtos eſtàn en razon duplicada, &c.

PROPOSICION LXI.

THEOREMA. (Fig. 114.)

256 *Los triangulos ſemejantes* ABC, DEF, *tienen proporcionales ſus Vaſes* AB, DE, *y ſus alturas* CK, HF.

DEMONSTRACION.

Los triangulos ACK, DFH, tienen los angulos K,H iguales por rectos, el angulo A igual al angulo D por ſupoſicion: luego ſon ſemejantes (224), y en ſu conſequencia AC : CK = DF : FH (219); pero por ſupoſicion AC: AB = FD : DE : luego AB : CK = DE : HF. (122. *Arith.*)

COROLARIO. (Fig. 114.)

257 *Los triangulos ſemejantes* ABC, DEF,

DEF, *eſtàn en razon duplicada de ſus lados homologos* AB, DE: y lo miſmo ſe prueba en qualeſquiera otros dos lados, ſi à ellos ſe baxan las perpendiculares de los angulos opueſtos. (*Es la* 19. 6. *Eucl.*)

PROPOSICION LXII.

THEOREMA. (*Fig.*115.)

258 *Los Poligonos ſemejantes* X, Z. 1°. *ſe dividen en igual numero de triangulos.* 2. *Semejantes.* 3. *Proporcionales à ſus todos.* 4. *y eſtàn en razon duplicada de ſus lados homologos* AB, *ab.*

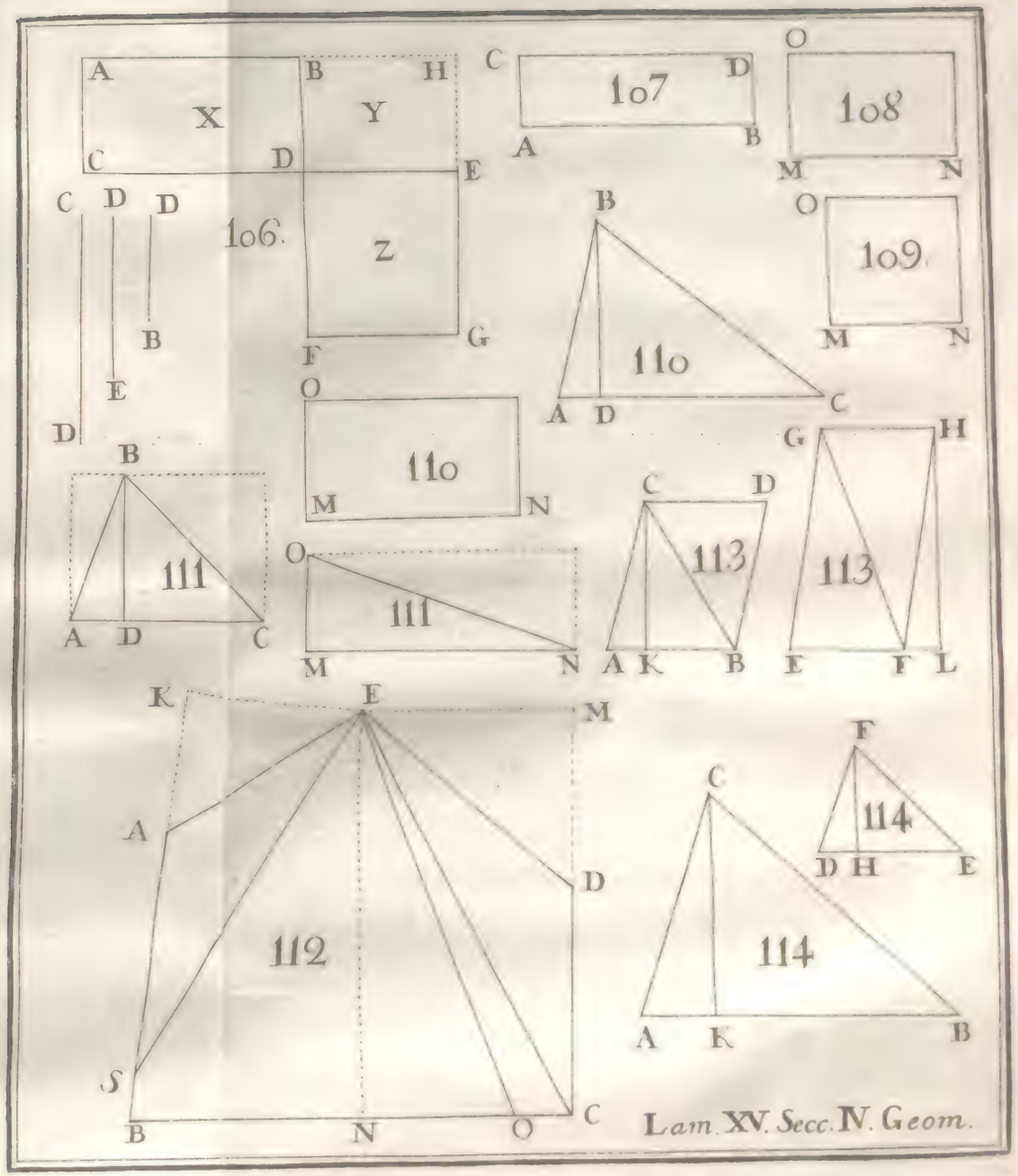
1. Deſde los angulos iguales D, *d*, tirenſe rectas à los otros angulos, con lo que las figuras quedaràn divididas en igual numero de triangulos, como por sì miſmo es manifieſto.

2. Los triangulos AED, *aed*, tienen los angulos E, y *e* iguales, y los lados que los comprenden proporcionales

(119): luego ſon ſemejantes (229). Del miſmo modo ſon ſemejantes los triangulos BCD, *bcd*. Y en quanto à los triangulos ADB, *adb*, ſe tienen ya probado iguales los angulos EAD, *ead*, y los angulos CBD, *cbd*, en virtud de la ſimilitud de los triangulos; luego ſi de los iguales EAB, *eab*, ſe quitan los iguales EAD, *ead*; y de los iguales CBA, *cba*, ſe quitan los iguales CBD, *cbd*, quedarà DAB = *dab*; y DBA = *dba*: luego los triangulos DBA, *dba*, ſon tambien ſemejantes (224).

3. Por ſer ſemejantes los triangulos ADB, *adb*, eſtàn en razon duplicada de ſus lados homologos AB, *ab* (257), por la miſma razon eſtàn en razon duplicada de AE, y *ae*, los triangulos AED, *aed*; pero AE : *ae* = AB : *ab*; luego tambien eſtàn en razon duplicada de AB, à *ab* (122. *Arith.*); y con igual razonamiento ſe prueba, que los triangulos DCB, *dcb*, eſtàn en razon duplicada de AB con *ab*:

eſ-


A
X
B
H
Y
C
D
E
Z
F
G
106.
C
107
D
A
B
O
108
M
N
109.
110
111
112
113
114
K
S
Lam. XV. Secc. N. Geom.

eſto es, todos los triangulos eſtàn entre sì en una miſma razon; y ſiendo iguales en numero, ſerà X ſuma de los antecedentes à Z, ſuma de los conſequentes, como qualquier antecedente ADB à ſu conſequente *adb*. (146. *Arith.*)

4. El triangulo ADB al triangulo *adb* eſtà en razon duplicada de AB con *ab*: luego en la miſma eſtaràn los Poligonos X, Z; (146. *Arith.*) eſto es en razon duplicada de ſus lados homologos. (*Es la* 20. 6. *Eucl.*)

COROLARIO I. (Fig. 115.)

259 *Si à los lados homologos* AB=9; *ab*=3 *ſe halla la tercera proporcional* M=1; *la razon de la primera* AB=9 *à la tercera* M=1 *es la miſma que tiene la area del Poligono* X *à la area del Poligono* Z: pues una, y otra es duplicada de AB=9 à *ab*=3. (152. *Arith.*)

COROLARIO II. (Fig. 115.)

260 *Los Poligonos ſemejantes* X, Z, *eſtàn como los quadrados* 81, 9 *de ſus lados homologos* AB = 9 ; *ab* = 3, pues eſtos como figuras ſemejantes (221) eſtàn aſsi como aquellos en razon duplicada de ſus lados (258); y aſsi ſe vè, que la razon de 81 à 9, es la miſma, que de 9 à 1, demoſtrada en el articulo precedente.

COROLARIO III. (Fig. 116)

261 Para *multiplicar, ò aumentar las figuras ſemejantes.* Por exemplo, que la figura M ſe quiere aumentar quatro veces. Entre el lado AB, y otro BC quatro veces mayor, halleſe una media proporcional BE (238), con lo que la figura ſemejante, y ſemejantemente pueſta ſobre BE, ſerà quadrupla de M; pues por ſer AB, BE, BC tres continuas proporcio-

cionales ; la figura M à ſu ſemejante ſobre BE , es como AB à BC. (259) eſto es , ſegun la conſtruccion , como 1 à 4. Lo miſmo ſe executarà en qualquier razon dada.

COROLARIO IV. (Fig.117.)

262 Para *dividir , ò diſminuìr figuras ſemejantes.* Por exemplo , que ſe quiere tomar la tercera parte de la figura M. Al lado AB añadaſe ſu tercera parte haſta C, y ſobre toda la AC formeſe un ſemicirculo para hallar entre AB , y ſu tercio BC una media proporcional BE. (238) con lo que la figura ſemejante , y ſemejantemente pueſta ſobre BE, ſerà la tercera parte de M. La demoſtracion es la miſma , que la del Corolario precedente.

SCHOLIO.

263 Correſponde eſtas propoſicio-

nes

nes à lo que el multiplicar, y partir en la Arithmetica, como es facil inferir.

PROPOSICION LXIII.

THEOREMA. (*Fig.* 118.)

264 *En todo triangulo rectangulo* ABC, *el quadrado de la Hipothenusa* AC *es igual à los quadrados hechos sobre los otros dos lados* AB, BC.

DEMONSTRACION.

Sean X, Z, Y, los quadrados de los lados del triangulo, y BDE perpendicular sobre AC. Por ser AC, AB, AD continuas proporcionales (236), el rectangulo AE hecho de las extremas AC, AD, es igual al quadrado X hecho de la media AB (244) y tambien por ser continuas proporcionales AC, CB, CD, el rectangulo CE hecho de las extremas AC, CD,

CD, es igual al quadrado Z, hecho de la media BC ; pero los rectangulos AE, CE componen el quadrado total Y (39. *Arith.*) : luego es igual à los quadrados X, Z. Que es, &c. (*Es la* 47. 1. *Eucl.*)

COROLARIO I. (Fig.119.)

265 *En todo triangulo rectangulo* ABC *el Poligono* Y, *descripto sobre la Hipothenusa* AC, *es igual à los Poligonos semejantes, y semejantemente descriptos sobre los otros dos lados*, pues unos, y otros estàn como los quadrados de sus lados homologos AC, AB, BC (260) ; pero el quadrado de AC es igual à los quadrados de AB, y de BC (264) : luego tambien el Poligono Y serà = X + Z. (*Es la* 31. 6. *Eucl.*)

COROLARIO II. (Fig.120.)

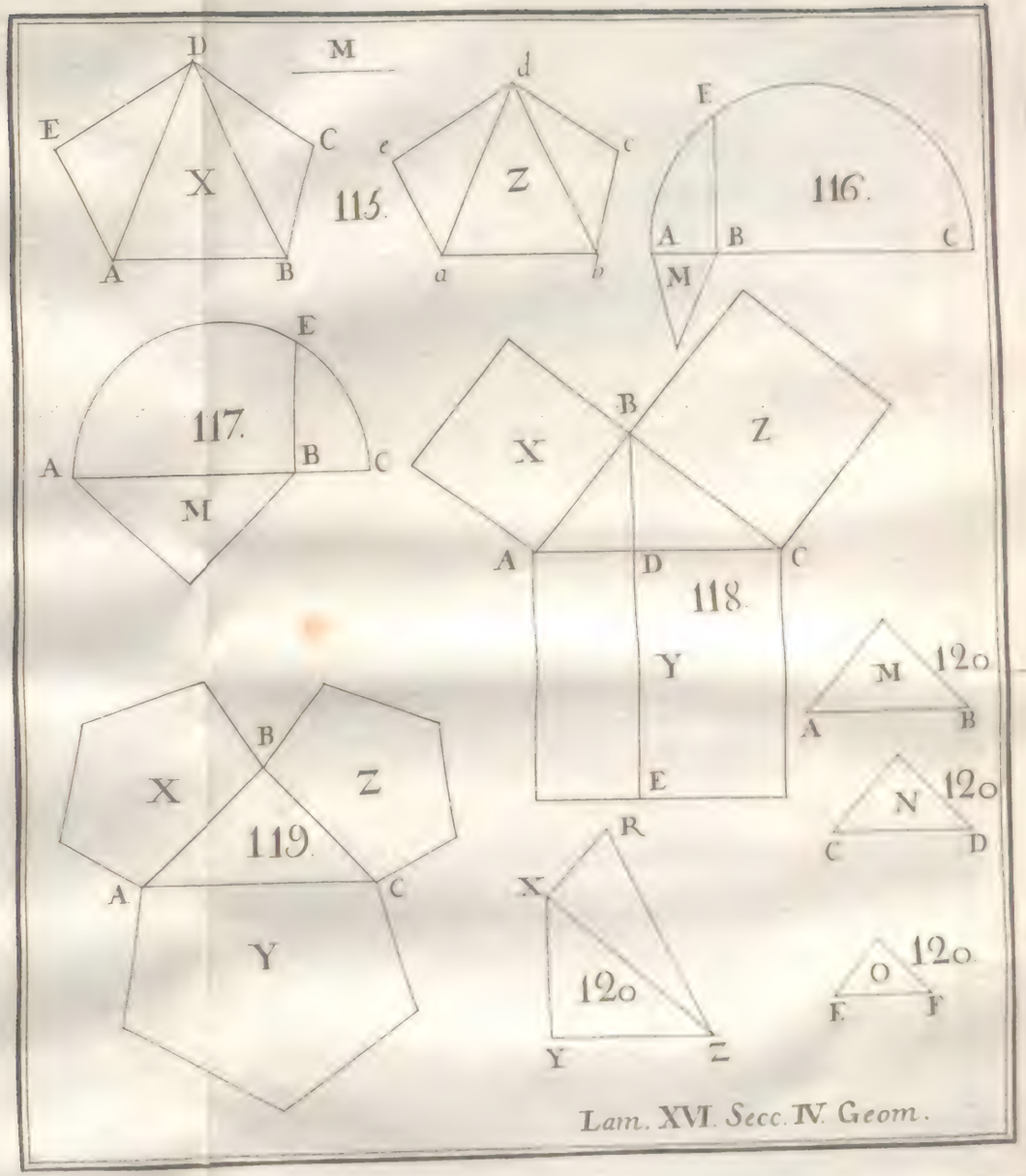
266 Para *sumar qualesquiera figuras se-*

ſemejantes M, N, O, ſe diſpondràn los dos lados homologos AB, CD en el angulo recto X Y Z, y tirada la Hipothenuſa X Z, ſerà eſta el lado homologo de la Figura ſemejante, è igual à las de los lados homologos YX, YZ, ò bien M,N. (265) Para ſumar tambien la figura O, ſe pondrà ſu lado homologo EF, con XZ en angulo recto, y tirando la recta XR, la figura ſemejante deſcripta ſobre eſta hipothenuſa, ſerà la ſuma de las tres propueſtas, en cuya conformidad ſe procederà, ſi ſe huvieren de ſumar mas.

COROLARIO III. (Fig. 121.)

267 Para *reſtar una figura* N *de otra* M *ſu ſemejante*; ſe formarà ſobre el lado AB un ſemicirculo, y transfiriendo deſde B, haſta F el lado homologo CD, ſe tendrà, que la figura ſemejante de la cuerda AF ſerà la diferencia, ò reſta; pues por ſer el angulo F en el ſemicirculo rec-

to



Lam. XVI. Secc. IV. Geom.

to (183) la figura de AB es igual à las figuras ſemejantes de AF, FB. (265)

SCHOLIO.

268 Eſtas propoſiciones ſirven, como ſe vè en la Geometria, de lo que las reglas del ſumar, y reſtar en la Arithmetica: entendiendo por figuras ſemejantes lo que en la Arithmetica por numeros de una miſma eſpecie.

PROPOSICION LXIV.

PROBLEMA. (*Fig.* 122, 123.)

269 *Conſtruìr un rectilineo ſemejante, y ſemejantemente pueſto à otro dado* M, *ſobre una recta dada* AB.

RESOLUCION, Y DEMONSTRACION.

Reſuelta la figura en triangulos, ſobre

bre AB ſe conſtruirà un triangulo ABD ſemejante al *abd* por qualquiera de los modos explicados en los Articulos (225, 228, 230, 232): deſpues ſobre AD ſe conſtruirà otro triangulo ADE ſemejante al *ade*: y ſobre BD otro triangulo BCD, ſemejante al *bcd*: con lo que el Poligono ABCDE ſerà ſemejante al *abcde*, pues ſe compone de igual numero de triangulos ſemejantes. (258) (*Es la* 20. 6. *Eucl.*)

SCHOLIO I. (Fig. 124, 122, 123.

270 El methodo mas ſeguro en la practica para conſtruir un triangulo ſemejante à otro dado, es el explicado en el Articulo (228) de las quartas proporcionales, cuya invencion ſe facilita de eſte modo. Tireſe una recta indefinida NO, y deſde N hagaſe un arco con la diſtancia *ab* del lado de la figura dada: deſde P con el lado homologo AB de la fi-

figura que se và à construìr, cortese el arco en Q, y tirese la recta NQ, con esto, queriendo hallar una quarta proporcional à los lados *ab*, AB, y *ad*, se harà con la *ad* un arco desde N, que corte los lados del angulo en R, y S, y la cuerda RS serà la quarta proporcional, que se desea: pues por la similitud de los triangulos QNP, RNS, facil de concebir, es NQ : QP = NR : RS : en cuya conformidad, transfiriendo en este angulo todas las rectas de la figura M, las cuerdas correspondientes daràn las quartas proporcionales que se quiera.

SCHOLIO II.

271 Este angulo assi dispuesto de los lados homologos de las figuras, se llama *angulo de reduccion*, y es de una grande conmodidad para la reduccion de los Planos de mayor à menor, ò de menor à mayor tamaño.

SCHO-

SCHOLIO III. (Fig. 122, 126, 125.

272 Puede ſuceder, que aumentando un Plano en razon del lado *ab* al lado AB, de eſtas dos rectas no ſe pueda formar un triangulo Iſoſceles, por ſer AB mayor que dos veces *ab* (103), en cuyo caſo, de los lados homologos AB, *ab*, en qualquier angulo ſe harà el Paralelogramo PQRS, y ſe tirarà la Diagonàl PR, que en caſo neceſſario ſe prolongarà, como tambien los lados del Paralelogramo. Los lados de la figura M, ſe paſſaràn en el lado P S, y tirando por ſus puntos O o paralelas à S R, ſe tendràn las quartas proporcionales ON, ò lados correſpondientes de la figura, que ſe và à conſtruìr, ſegun que ſe puede inferir de la ſimilitud de los triangulos PON con el triangulo PSR.

PRO-

PROPOSICION LXV.

THEOREMA. (*Fig.* 127.)

273 *Si quatro, ò mas rectas* AB, CD, EF, GH, *fueren proporcionales, tambien lo serán las figuras ſemejantes, y ſemejantemente deſcriptas ſobre ellas, y al contrario.*

DEMONSTRACION.

La figura de AB à la figura de CD, eſtà en razon duplicada de AB à CD (258), ò bien de EF à GH (122. *Arith.*); pero la figura de EF à la figura de GH, eſtà tambien en razon duplicada de EF, à GH (258); luego la figura de AB à la figura de CD, ſerà como la figura de EF à la figura de GH (122. *Arith.*) Del miſmo modo ſe demueſtra la inverſa. (*Es la* 22. 6. *Eucl.*)

COROLARIO I.

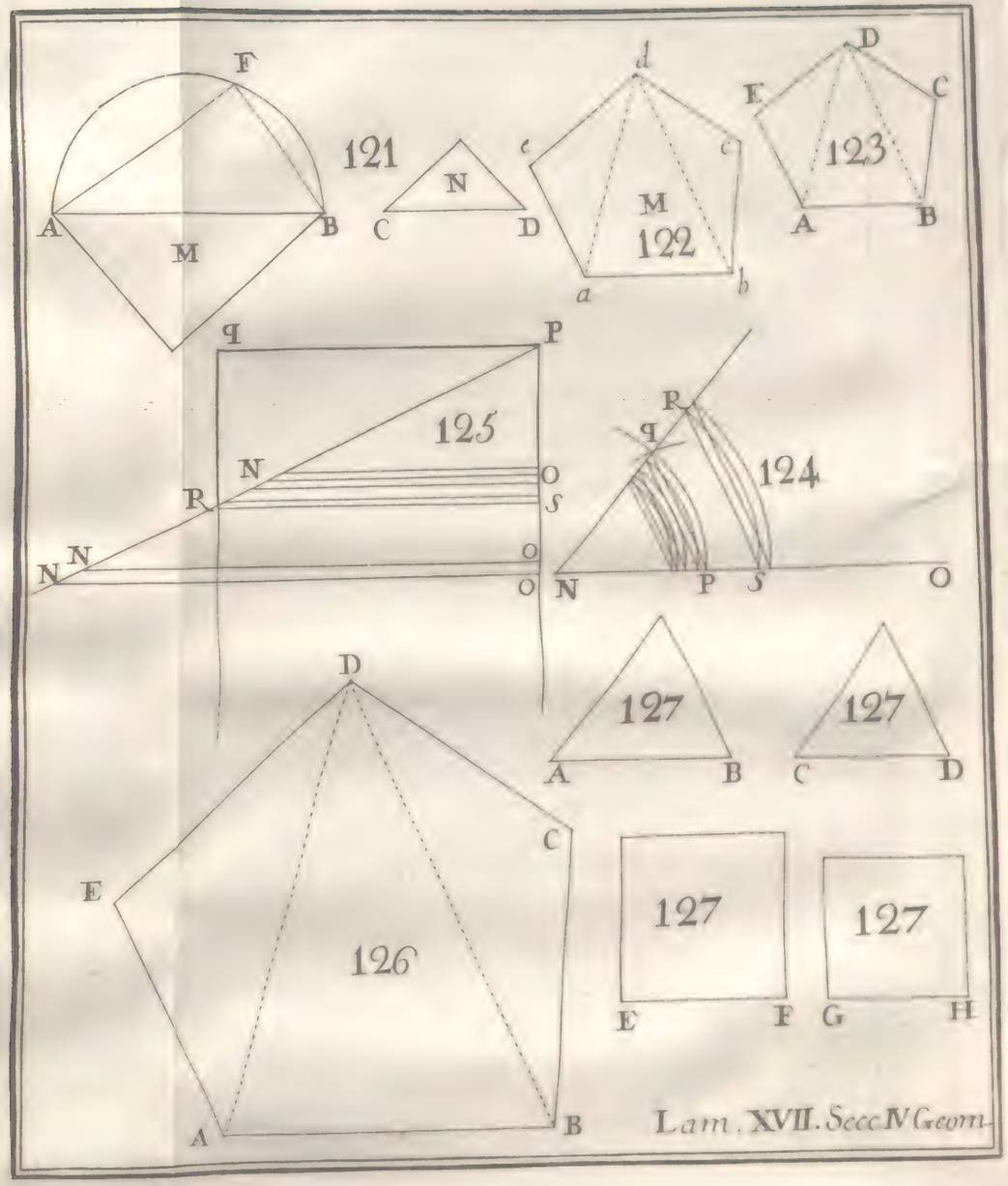
274 *Para hallar una figura tercera, ò quarta proporcional à dos, ò tres figuras dadas*, ſe hallarà una tercera, ò quarta proporcional à los lados homologos (215, 216.) y ſerà el lado homologo de la figura ſemejante, que ſe deſea. (273)

COROLARIO II.

275 *Del miſmo modo ſi ſe quiere una figura media proporcional entre dos dadas:* halleſe una media proporcional entre los lados homologos (238), y ſerá el lado homologo de la figura, que ſe pide. (273)

AXIOMA VIII.

276 La area de un Poligono regular circunſcripto à un circulo, es mayor que el circulo, y menor la de el Poligono inſcripto.


F
A
M
B
121
N
C
D
d
c
c
M
122
a
b
D
E
C
123
A
B
q
P
125
N
O
R
S
N
N
O
O
R
q
124
N
P
S
O
D
127
A
B
127
C
D
C
E
126
A
B
127
E
F
127
G
H
Lam. XVII. Secc IV Geom.

AXIOMA IX.

277 El Perimetro de un Poligono regular circunſcripto à un circulo, es mayor que la periferia del circulo, y menor la de el Poligono inſcripto.

AXIOMA X.

278 Si ſe ſuponen inſcriptos, y circunſcriptos al circulo Poligonos regulares de mayor, y mayor numero de lados al infinito, vendràn finalmente à degenerar, ò fenecer en el circulo.

DEFINICION XLIX.

279 Por *ultima razon*, entre dos cantidades de la miſma eſpecie, entendèmos aquella, cuyos terminos ſon los mas inmediatos à la igualdad: de ſuerte, que no ſea dable cantidad alguna media mayor que el uno, y menor que el otro.

AXIOMA XI.

280 *Las razones ultimas, ò mas inmediatas á la razon de igualdad, ſon iguales*; pues ſus exponentes ſon los mas inmediatos al exponente de la igualdad (117. *Arith.*)que es la unidad(119 *Arith.*) eſto es, ſon unos miſmos; por conſiguiente las razones. (118. *Arith.*)

PROPOSICION LVI.

THEOREMA. (*Fig.*128.)

281 *La area de qualquier poligono regular* ABCDEF *es igual al producto de ſu perimetro por la mitad de la perpendicular* OG *baxada ſobre uno de los lados* AB *deſde el centro* O *del circulo, que ſe le puede inſcribir, ò circunſcribir al tal poligono.* (204. 206.)

DE-

DEMONSTRACION.

Desde el centro O del circulo ABCD EF circunscripto, tirense radios à los angulos, con lo que la figura quedarà dividida en triangulos totalmente iguales, como es facil percibir (67): luego si la area de uno de estos triangulos AOB, igual al producto de AB por la mitad de OG (155), se multiplica por el numero de estos triangulos, ò lo que es lo mismo, se multiplica todo el perimetro por la mitad de la perpendicular OG, se tendrà la area de todos los triangulos, esto es, de todo el Poligono. Que es, &c.

EXEMPLO.

Sea la figura de la demostracion un exagono regular: supongase su lado AB $=$ 10° luego su mitad GB (162) serà $=$ 5°. por consiguiente la perpendicular OG será $= \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75}$ (264)

Para extraer la raiz quadrada de 75°. algo aproximada, reduzcanse (252) à lineas quadradas, y se tendrà $\sqrt{75^{\circ}} = \sqrt{97200''} = 312''$ proximamente, que reducidas, seràn 8−2′, de suerte, que siendo AB = 10° serà OG = 8° −2′.

Todo el perimetro serà = 10°.6 = 60°. y la mitad de 8°−2′ serà = 4°−1′

Perimetro =	60°.
$\frac{1}{2}$ OG =	4°−1′
Area del Poligono =	....260°.

PROPOSICION LXVII.

THEOREMA. (*Fig.*129.)

282 *La area de un circulo es igual al producto de su circunferencia por la mitad del radio.*

DE-

DEMONSTRACION.

Imagineſe circunſcripto al circulo un poligono regular de tal numero de lados, que mayor no pueda ſer ſin degenerar en circulo (278), eſto es, ſea el ultimo poligono regular, que al circulo ſe le pueda imaginar circunſcripto. Sea AB ſu lado tangente en G, à cuyo punto, ſi ſe tira el radio OG, ſerà perpendicular ſobre AB (177): tirenſe OA,OB, con lo que ſe tendrà el triangulo AOB. Y reſpecto de que entre la recta AB, y el arco CD no puede haver por ſupoſicion cantidad alguna media, mayor que el arco, y menor que el lado AB; ſerà la razon del arco al lado la ultima, aſsi como la de el ſector COD al triangulo AOB (279): luego la razon del ſector COD al triangulo AOB, ſerà la miſma, que de el arco CGD,à la recta AB (280): por conſiguiente ſeràn proporcionales el ſector COD, al triangulo AOB, co-

mo el arco CD, à la recta AB; pero el triangulo AOB es igual al producto de AB, por la mitad de OG (155): luego el sector COD serà igual al producto de CD por la mitad de la misma OG.

Componiendose, pues, el circulo de igual numero de estos sectores, que el Poligono de triangulos, serà la suma de aquellos, ò area del circulo, à la suma de estos, ò area del Poligono, como la suma de las Vases de los unos, ò circunferencia del circulo à la suma de las Vases de los otros, ò perimetro del Poligono: luego si este se tiene multiplicando su Vase, ò perimetro, por la mitad del radio OG (281): tambien el circulo se tendrà multiplicando su circunferencia por la mitad del mismo radio: Que es, &c.

COROLARIO I.

283 *Como el Poligono circunscripto al cir-*

circulo, assi es el perimetro del Poligono à la periferia del circulo.

COROLARIO II.

284 *Qualquier sector de circulo es igual al producto del arco de su Vase por la mitad del radio*, como es facil inferir de la proposicion antecedente.

COROLARIO III.

285 *Por lo que el circulo al sector es como la periferia al arco.*

COROLARIO IV.

286 Tambien *los sectores de un mismo circulo son entre sì como sus Vases.*

COROLARIO V. (Fig. 130.)

287 Siendo la medida de los angu-

los

los ABC, CBD, los ſectores ABC, CBD *ſeràn entre sì los angulos al centro, como los arcos* AC, CD *ſobre que inſiſten.*

COROLARIO VI. (Fig. 130.)

288 Y por quanto los angulos AOC, COD, formados en la circunferencia, ſon la mitad de los ABC, CBD formados en el centro B (179): ſe ſigue igualmente, que *los angulos formados en la circunferencia, ſon entre sì como los arcos ſobre que inſiſten.*

SCHOLIO.

289 En eſtos tres ultimos Corolarios ſe comprende la propoſicion 33. del 6. de Euclides, que dice aſsi: *En los circulos iguales, los angulos formados en el centro, ò en la circunferencia, ſon entre sì como ſus arcos, y lo miſmo los ſectores.*

PRO-

PROPOSICION LXVIII.

THEOREMA. (Fig. 131.)

290 *En qualesquiera circulos, los radios, ò diametros son proporcionales con sus periferias.*

DEMONSTRACION.

Supongase AB el lado del ultimo Poligono regular, que se puede imaginar circunscripto al circulo X; y HL asimismo el lado del ultimo Poligono regular circunscriptible al circulo Z; por lo que tiradas las OA, OB; MH, ML, como tambien los radios OG, MK à los puntos G, K del contacto, se tendràn los triangulos AOB, HML semejantes, pues los Poligonos se suponen serlo (258): por consiguiente serán proporcionales AB : GO = HL : KM (219); pero AB:

CD

CD=HL: NP, reſpecto de que eſtas razones ſe ſuponen las ultimas, ò mas inmediatas à la igualdad (281): luego CD: OG=NP: MK (122. *Arith.*); y como la periferia de X à la periferia de Z, ſea como el arco CD al arco NP, pues ſe conſideran divididas en igual numero de partes iguales, tambien las periferias ſeràn proporcionales con ſus radios, ò con ſus dobles los diametros.

COROLARIO I. (Fig. 131.)

291 Los *circulos eſtàn entre sì como los quadrados de ſus diametros*, pues eſtando en razon compueſta de ſus periferias por la mitad de ſus radios (282), y eſtas ſer dos razones= (290) ſerà el circulo X al circulo Z en razon duplicada del radio OG al radio MK, ò de las periferias miſmas (151. *Arith.*) pero los quadrados eſtàn tambien en razon duplicada de ſus lados (258); luego el circu-

lo

lo X al circulo Z, ſerà como el quadrado de OG al quadrado de MK, ò como los quadrados de los diametros.

COROLARIO II.

292 *Los ſectores de circulos, que comprenden angulos iguales, tienen proporcionales ſus radios con los arcos.*

SCHOLIO.

293 El averiguar la razon, que el diametro de un circulo tiene con ſu circunferencia, ha ſido en todos tiempos uno de los mas célebres Problemas entre los Geometras, ſin que haſta ahora ſe haya podido dàr una expreſsion juſta de ſu valor. Por varios modos ſe ha tentado ſu reſolucion, pero por todas partes ſe mantiene impenetrable. Y por quanto en la practica ſe neceſsita alguna razon, aunque aproximada en eſte aſ-

ſump-

ſumpto, ha ſido preciſo recurrir à la inſcripcion, y circunſcripcion de los Poligonos regulares; pues ſiendo el perimetro del inſcripto menor que la periferia del circulo, y mayor que eſta la del Poligono circunſcripto (276), mientras mayor ſea el numero de lados del inſcripto, y circunſcripto, mas ſe aproximarà de qualquiera de ellos el valor de la circunferencia: bien que eſte methodo por ſu naturaleza miſma jamàs puede llegar à dàr el juſto valor de la periferia.

Mediante la inſcripcion, y circunſcripcion de un Poligono de 96 lados, reſultante de la continua biſeccion deſde el exagono, hallò el celebrado Archimedes, que ſupueſto el diametro del circulo = 1; es el perimetro del circunſcripto = $3+\frac{10}{70}$, y el perimetro del inſcripto = $3+\frac{10}{71}$, por lo que ſiendo tan corta la diferencia entre los dos, y hallandoſe en medio la circunferencia, ſe pue-

puede tomar qualquiera de ellos por el valor de esta en la practica. Tomase la del Poligono circunscripto $= 3 + \frac{10}{70} = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}$, de suerte, que siendo el diametro $= 1$, se establece en este sentido, que la circunferencia es $= \frac{22}{7}$; ò bien que siendo 7 el diametro, la circunferencia es 22.

Adriano Mecio hallò, que supuesto el diametro $= 113$, la circunferencia es proximamente $= 355$.

Luis Ceulen demostrò, que supuesto el diametro $= 1000000,000000,000000,000000,000000,000000$, el perimetro del Poligono inscripto es de 314159, 265358, 979323, 846264, 338327, 950288, y el perimetro del Poligono circunscripto es de 314159, 265358, 979323, 846264, 338327, 950289. que solo difiere de la antecedente en la unidad de la ultima nota; cosa verdaderamente insensible.

El célebre Eulero saca, que supues-

to el diametro 1, es la circunferencia en partes decimas = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214808651327230664709938446 proximamente.

Para los calculos regulares tomamos la razon de Archimedes de 7 à 22; pero en otros de mayor exactitud ſirven las otras razones, con las tres, quatro, ò mas notas primeras, ſegun la juſtificacion con que ſe pretendan las reſultas.

COROLARIO III. (Fig. 132.)

294 Para *hallar la circunferencia de un circulo dado ſu diametro.* Por exemplo, que dado el diametro AB = 10°... 1′ .... 6″ ſe quiere hallar la circunferencia. Digaſe como 7 á 22, aſsi 10°... 1′ ... 6″ al quarto proporcional, que ſerà

rà la circunferencia, que ſe deſea (290). = 33°.

COROLARIO IV. (Fig. 132.)

295 Para *hallar la area de un circulo dado ſu diametro.* Por exemplo, que dado el diametro AB = 10°... 1′ ... 6″ ſe quiere hallar ſu area; halleſe primero ſu circunferencia = 33°. (294) y multipliqueſe eſta por la mitad del radio, igual à la quarta parte del diametro 10°... 1′ ... 6″, eſto es, por 2°... 1′ ... 10″ ... 6‴, con lo que el producto reſultante = 86°... 1′ ... 10″ ... 6‴ ſerà la area del circulo. (282)

SCHOLIO.

296 Reſpecto de que en el circulo, cuyo diametro es 7, y ſu circunferencia 22, es ſu area = $\frac{7}{4}$. 22 = $\frac{7}{2}$. 11 = $\frac{77}{2}$ (295) y que la area del quadrado cir-

cunſcripto es=49, ſerà eſte à ſu circulo, como 98 à 77, ò reducida eſta razon à menores terminos, ſerà como 14 à 11. Por conſiguiente, eſtando los circulos entre sì, como los quadrados de ſus diametros (291), ſe podrà tener tambien la area de un circulo con eſta proporcion, como 14 à 11, aſsi el quadrado del diametro dado=110°...ó... ...9′ al quarto proporcional por la area del circulo, que como antes es= 86°...1′ ...10″ ...6‴.

COROLARIO V.

297 Para *hallar el diametro de un circulo dada ſu area.* Por exemplo, dada la area de un circulo=86°...1′ ... 10″ ...6‴ ſe quiere ſaber ſu diametro, hagaſe eſta proporcion como 11 à 14; aſsi 86°...1′ ...10″ ...6‴ à 110°...ó..9′ quadrado del diametro que ſe buſca, cuya raiz quadrada

da = 10°. . . 1′ . . . 6″ ſerà el diametro.

COROLARIO VI. (Fig. 132.)

298 Para *hallar la area de un ſector* AOB *dado el diametro* AC *de ſu circulo, y el arco* AB. Por exemplo, que dado el diametro AC = 10°. . . 1′ . . . 6″ y el arco AB = 60°. ſe quiere hallar el ſector AOB. Con el diametro dado halleſe la area del circulo (296), que en eſte caſo ſerà = 86°. . . 1′ . . . 10″ . . . 6‴ hagaſe deſpues eſta proporcion como 360°, à la area del circulo hallada aſsi 60° à 14° . . . 1′ . . . 3″ . . . 9‴ por la area del ſector; pues el circulo, y el ſector ſon entre sì como ſus Vaſes. (285)

COROLARIO VII. (Fig. 132.)

299 Para *hallar la area de un ſegmento* ABC *de circulo dado el arco* ABC, *y el radio*

dio AO; por exemplo, que este sea = 10° y el arco ABC = 60°; baxo este supuesto la cuerda AC será = 10° (196) y DO = $\sqrt{100-25} = \sqrt{75°} = 8°+2'$: por lo que multiplicando $8°+2'$ por la mitad de AC = 5 se tendrà 43°... 1' por la area de el triangulo, que restada de la de el sector ABCO = 52°... 1' darà 11°. por el valor del segmento.

SCHOLIO.

300 Este Problema propuesto en general pertenece à la Trigonometrìa, pues con los datos arriba mencionados, se halla la AC, y la DO, como à su tiempo se verà. Lo mismo sucede con el exemplo del num.(281) pues de la determinacion del lado del Poligono resulta el radio, y la perpendicular.

COROLARIO VIII.

301 Para *hacer un quadrado igual de*

un

un circulo. Entre ſu circunferencia, que ſe hallarà, y la mitad del radio, halleſe una media proporcional, que ſerà el lado del quadrado igual del circulo (244) Eſto es, lo que ſe llama *quadratura del circulo*, que ya ſe vè depende de hallar una recta igual à ſu periferia.

COROLARIO IX.

302 Eſtando los circulos como los quadrados de ſus diametros, *ſerà tambien en el triangulo rectangulo el circulo de la hipothenuſa igual à los circulos de los otros dos lados.*

COROLARIO X. (Fig. 133.)

303 Si ſobre los lados de el triangulo Iſoſceles rectangulo ABC, ſe deſcriben ſemicirculos, ſerà el ſemicirculo de la hipothenuſa AC igual à los ſemicirculos de los otros lados; luego qui-

tando los ſegmentos ADB, BEC comunes, quedarà el triangulo ABC igual à las Lunulas AMBD, BNCE: y la mitad del triangulo igual à una Lunula AMBD. Eſto ſe dice *quadrar la Lunula de Hipocrates Chio* ſu inventòr, de ſuerte, que aunque no ſe ha podido hallar la quadratura de todo el circulo, ſe dà la de algunos ſegmentos.

PROPOSICION LXIX.

THEOREMA. (Fig. 134.)

304 *Si dos cuerdas* AB, CD *ſe cortan en* E *dentro de un circulo, el rectangulo* AE. EB *de los ſegmentos de la una, es igual al rectangulo* CE. ED *de los ſegmentos de la otra.*

DEMONSTRACION.

Tiradas las rectas AC, DB; los triangulos AEC, DEB, ſeràn ſemejantes, pues los

los angulos en E ſon iguales (71), como tambien los angulos en A, y en D, por inſiſtir ſobre el arco CB (181): luego AE: EC = ED: EB: por conſiguiente AE. EB = EC. ED. (243) Que es, &c. (*Es la 35. 3. Eucl.*)

PROPOSICION LXX.

THEOREMA. (Fig. 135.)

305 *Si fuera de un circulo ſe toma un punto* A, *y de èl ſe tira una tangente* AB, *y una ſecante* AC *haſta la circunferencia, el rectangulo* AC. AD *hecho de tola la ſecante por la parte exterior, es igual al quadrado de la tangente* AB.

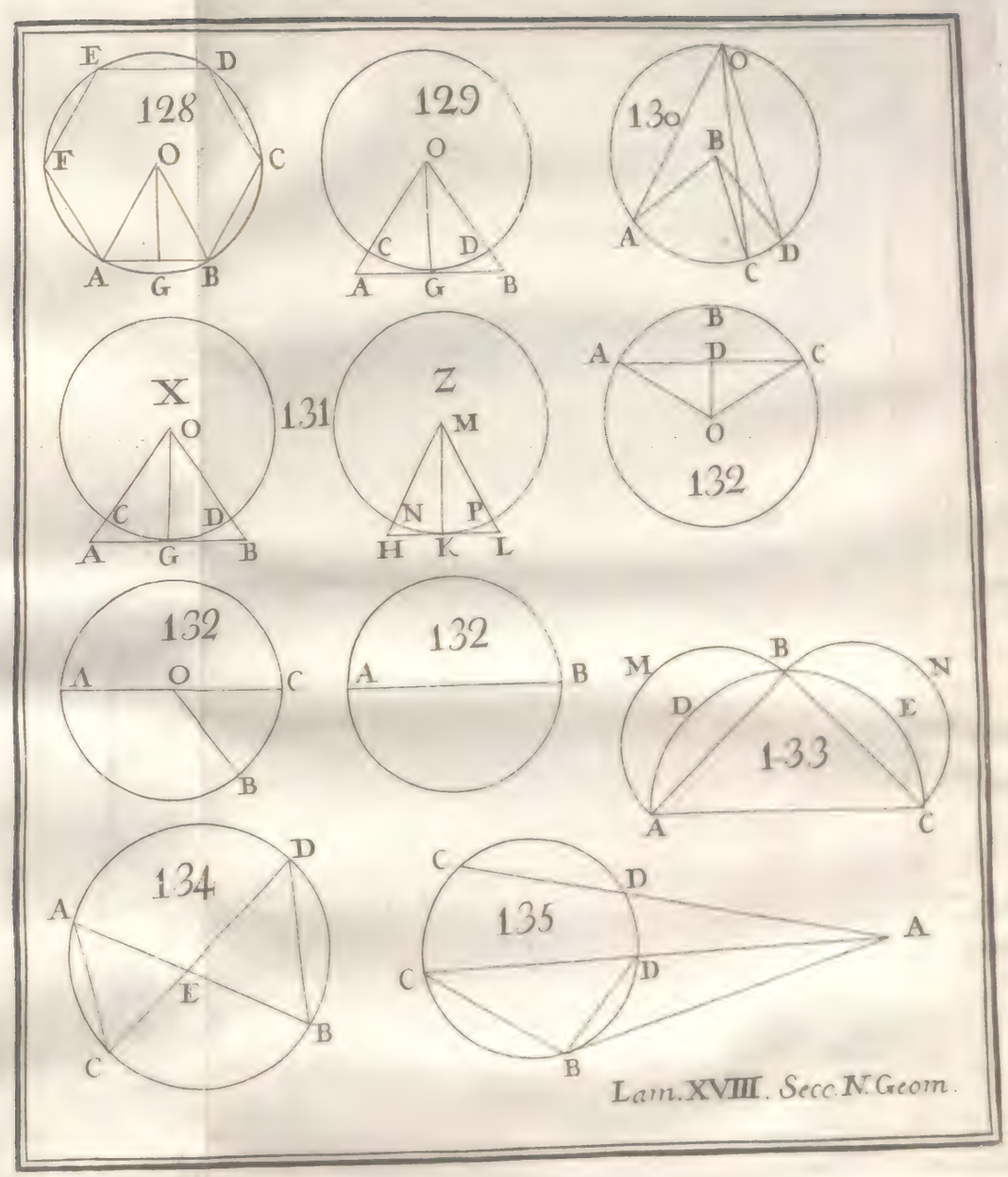
DEMONSTRACION.

Tiradas las rectas BD, BC, los triangulos ADB, ACB, ſon ſemejantes, pues tienen el angulo A comun, y el angu-

lo ABO de la tangente con la ſecanté igual al angulo C del otro ſegmento (189); luego AC: AB=AB. AD: por conſiguiente AC. AD= AB^2. (244) Que es, &c. (*Es la 36. 3. Eucl.*)

COROLARIO.

306 *Si deſde un punto* A *tomado fuera de un circulo, ſe tiran diferentes ſecantes* AC, *los rectangulos* AC. AD *hechos de la toda por la parte exterior, ſon iguales entre sì*, pues qualquiera de ellos ſe ha demoſtrado igual al quadrado de AB.



Lam. XVIII. Secc. N. Geom.

SECCION V.

DE LAS PRINCIPALES propriedades de los Planos, en quanto à ſus ſecciones, y poſiciones.

AXIOMA XII.

307 *Todas las partes de una recta ſe hallan en un miſmo plano.* Infiereſe inmediatamente de la definicion de la ſuperficie plana. (14.) (*Es la* 1. *del* 11. *Eucl.*)

AXIOMA XIII.

308 *Todas las partes de un triangulo ſe hallan en un miſmo plano, como tambien dos rectas, que ſe cortan*, pues ſiendo el triangulo de que aqui ſe trata una ſuperficie plana (17. 35.) ſe infiere la primera parte inmediatamente de la definicion de

de la ſuperficie plana (14), y como conſequencia ſuya la ſegunda parte, pues los lados de un triangulo ſon rectas, que ſe cortan en ſu miſma ſuperficie. (*Es la* 2. 11. *Eucl.*)

AXIOMA XIV.

309 *Si dos ſuperficies ſe cortan, la ſeccion es una linea.* (11)

AXIOMA XV.

310 *Si dos planos ſe cortan, la comun ſeccion de ambos es una linea recta.* Infiereſe legitimamente de la miſma definicion de la ſuperficie plana. (14) (*Es la* 3. 11. *Eucl.*)

DEFINICION L. (Fig. 136.)

311 Una recta AB ſe dice *perpendicular à un plano* MP, quando es perpendi-

dicular à todas las rectas, que paſſan por el punto B, en que ella toca al plano.

PROPOSICION LXXI.

THEOREMA. (Fig. 136.)

312 *Si una recta* AB *fuere perpendicular à dos rectas* CB, BD, *que ſe cortan en el plano* MP, *ſerà tambien perpendicular al miſmo plano*, eſto es, à qualquier recta EB, que paſſe por el punto B, en que la perpendicular toca al plano. (311)

DEMONSTRACION.

Prolonguenſe las rectas DB, EB, CB, haſta H, G, F, en el miſmo plano, y tomenſe iguales BK, BL, como tambien BR, BQ, y tirenſe las rectas QK, RL, y aſsimiſmo las AK, AS, AQ, AR, AV, AL. (56. 57. 60.)

Los triangulos BQK, BLR, tienen

nen BK=BL; BQ=BR por conſtruccion; y los angulos en B comprehendidos iguales por Verticales (31. 71.): luego ſon totalmente iguales (62), por conſiguiente RL=QK, y el angulo QKB =BLR, como tambien KQB=LRB. (47)

Los triangulos BRV, BSQ, tienen BR=BQ, y los angulos RBV, SBQ= por Verticales (31, 71,), como tambien los R, y Q, ſegun lo demonſtrado: luego ſon totalmente iguales (79), por conſiguiente RV=SQ, y BV=BS. (47)

Los triangulos ABL, ABK, tienen BK=BL por conſtruccion (31) AB comun, y los angulos en B comprehendidos rectos por ſupoſicion (311): luego ſon totalmente iguales (62), por conſiguiente AL=AK (47). Del miſmo modo ſe prueba la total igualdad de los triangulos ABR, ABQ, y de que reſulta AR=AQ.

Los

Los triangulos ARL, AKQ, tienen segun esto los tres lados del uno iguales à los tres del otro: luego son totalmente iguales (67), por consiguiente el angulo ARL=AQK. (47)

Los triangulos ARV, ASQ, tienen los lados AR, RV, con el angulo comprehendido del uno iguales à los lados AQ, QS del otro, con el angulo comprehendido segun lo demostrado: luego son totalmente iguales (62), por consiguiente AV=AS. (47)

Ultimamente los triangulos BAV, BAS, son totalmente iguales (67), pues BV=BS; AV=AS; AB comun; luego los angulos ABS, ABV, son iguales (47): luego rectos, y la AB perpendicular sobre BE (24). Que es lo que se havia de demonstrar. (*Es la* 4. 11. *Eucl.*)

PRO-

PROPOSICION LXXII.

THEOREMA. (*Fig.* 137.)

313 *Si una recta* AB *fuere perpendicular à tres rectas* CB, EB, DB *en el concurso* B *de ellas, eſtaràn todas tres en un miſmo plano.*

DEMONSTRACION.

Si ſe dixere, que una de ellas BE no ſe halla en el miſmo plano MP, ſino en otro BG con la perpendicular AB (308), entonces tirada la recta BH comun ſeccion de los planos MP, BG (310), ſe tendrà, que por ſer la AB perpendicular à BC, BD, ſerà perpendicular al plano MP (312): luego ſerà tambien perpendicular à BH (311): por conſiguiente, hallandoſe BH tambien en el plano BG, el angulo ABE ſupueſto recto, ſerà igual

al

al angulo ABH (52) : el todo à la parte, que es impoſsible (39. *Arith.*) : luego todas tres ſe hallan en el miſmo plano. (*Es la* 5. *del* 11. *Eucl.*)

COROLARIO.

314 Con ſemejante demoſtracion ſe podrà convencer, que *ſi una recta es perpendicular à otras diferentes rectas en el miſmo punto en que ſe cortan, todas eſtas ſe hallan en un miſmo plano.*

PROPOSICION LXXIII.

THEOREMA. (*Fig.*138.)

315 *Si dos rectas* AB, CD, *fueren perpendiculares à un miſmo plano* MP, *ſeràn entre sì paralelas.*

DEMONSTRACION.

Tireſe BD (56), con lo que el angulo ABD ſerà recto (311); ſobre ella le-

levanteſe DE perpendicular, è igual à AB (59, 105), tirenſe AD, AE, BE (56); los triangulos ABD, BDE, tienen iguales los lados AB, DE (31); BD, comun, y los angulos comprehendidos rectos, luego ſon totalmente iguales (62) por conſiguiente BE=AD (47). De eſto ſe ſigue, que los triangulos ADE, ABE, ſon totalmente iguales, pues tienen AE comun; BE=BA; BE=AD (67): luego el angulo ABE=ADE (47), pero ABE es recto; luego ADE tambien lo es (52). Siendo, pues, ED perpendicular ſobre BD por conſtruccion; ſobre AD ſegun reſulta, y tambien ſobre CD, las tres rectas DC, DA, DB, ſe hallaràn en un miſmo plano (313): pero AB, BD, DA, ſe hallan en un plano (308): luego las rectas AB, BD, AD, CD, ſe hallan en un miſmo plano; por conſiguiente ſiendo en eſte plano los angulos CDB, ABD, rectos (311), las AB, CD, ſeràn paralelas. (81) (*Es la* 6. 11. *Eucl.*)

CO-

COROLARIO. (Fig.138.)

316. *Si una recta* AD *corta dos paralelas* AB, CD, *estarán las tres en un mismo plano.* (*Es la* 7. 11. *Eucl.*)

PROPOSICION LXXIV.

THEOREMA. (*Fig.*138.)

317 *Si de dos rectas* AB, CD, *paralelas, una* AB *fuere perpendicular à un plano* MP, *tambien lo será la otra* CD.

DEMONSTRACION.

Porque hecha la misma preparacion, que en la Proposicion antecedente, resultarán assi como alli los triangulos ABD, BDE totalmente iguales; como tambien BAE, AED: luego los angulos ABE, ADE son iguales (47); pero ABE

es recto, luego tambien ADE (52), por conſiguiente la ED ſerà perpendicular ſobre AD, ſegun reſulta de eſta demonſtracion, y perpendicular ſobre BD por la conſtruccion: luego ſerà perpendicular al plano en que ſe hallan las AD, DB (312): pero DC ſe halla en el miſmo plano, que AD, DB (316. 308.): luego es perpendicular tambien à DC (311), eſto es, DC ſerà perpendicular ſobre BD, DE: luego ſerà perpendicular al plano MP, en que ſe hallan. (312) (*Es la* 8. 11. *Eucl.*)

PROPOSICION LXXV.

THEOREMA. (*Fig.*139.)

318 *Las rectas* AB, CD *paralelas à una miſma* EF, *ſon paralelas entre sì, aunque eſtèn en diverſos planos.*

DE-

DEMONSTRACION.

Desde el punto H tirese una perpendicular HG sobre AB, y otra HK sobre CD (106); y por quanto la EH es perpendicular sobre HG, HK serà perpendicular al plano, que passe por GH, HK (312); pero HE, KC se suponen paralelas, como tambien HE, GA, luego seràn perpendiculares al mismo plano GHK, pues lo es la EH (317), por consiguiente seràn paralelas. (315) (*Es la 9. 11. Eucl.*)

PROPOSICION LXXVI.

THEOREMA. (Fig. 140.)

319 *Si dos rectas* AB, BC, *que concurren en un punto, son paralelas à otras dos* DE, EF, *que concurren en otro, formaràn angulos iguales* ABC, DEF.

DEMONSTRACION.

Suponganſe iguales BA, ED, como tambien BC, EF (60), y tirenſe las rectas AC, DF, è igualmente AD, BE, CF (56). Por quanto AB, DE ſon iguales (31), y paralelas, tambien lo ſeràn AD, EB (94), y del miſmo modo ſe prueba ſerlo las BE, CF: luego AD, CF ſeràn iguales, y paralelas (94), por conſiguiente tambien lo ſeràn AC, DF (94). Teniendo, pues, los triangulos ABC, DEF, ſus tres lados iguales, ſeràn totalmente iguales (67): luego el angulo ABC=DEF (47) (*Es la* 10. 11. *Eucl.*)

PROPOSICION LXXVII.

PROBLEMA. (*Fig.* 141.)

320 *De un punto* A *fuera de un plano* MP, *baxar una perpendicular.*

RE-

RESOLUCION.

Tireſe en el plano MP qualquier recta CD (56), à la qual deſde A baxeſe la perpendicular AB (106). Deſde el punto B ſobre BC levanteſe la perpendicular BF (105), à la qual ſi deſde A ſe baxa la perpendicular AG (106), ſerà perpendicular al plano.

DEMONSTRACION.

Porque tirada por G la HK paralela à DC (112), y ſiendo DB perpendicular à las AB, BG, ò plano, que paſſa por ellas (312), tambien lo ſerà HG (317): luego ſerà AG perpendicular à las HG, GB, por conſiguiente al plano MP (312), donde ſe hallan. (*Es la* 11. *del* 11. *Eucl.*)

PROPOSICION LXXVIII.

PROBLEMA. (Fig. 142.)

321 *De un punto* D *dado en un pla-*

no MP, *levantar una perpendicular.*

RESOLUCION, Y DEMONSTRACION.

De un punto A qualquiera, baxese por la proposicion antecedente una perpendicular AB, y tirese en el plano MP qualquier recta BD; en el plano DF, en que se hallan las AB, BD, levantese la DC paralela à AB (112), que serà perpendicular al plano (317). (*Es la* 12. *del* 11. *Eucl.*)

COROLARIO I. (Fig. 142.)

322 *De un punto* D *dado en un plano* MP, *no se puede levantar mas de una perpendicular* CD; pues si se dixere puede salir otra DE, entonces se tendrà en el plano DF, que passa por las dos rectas ED, DB (308), que los angulos EDB, CDB, serán rectos (24), que es imposible. (39. *Arith.*) (*Es la* 13. 11. *Eucl.*)

CO-

COROLARIO II. (Fig. 142.)

323 *De un punto* C *fuera de un plano, no se puede tirar à èl mas de una perpendicular* CD; pues si se dixera puede salir otra CS, entonces tirada la DS, se tendrà el triangulo DCS con dos angulos rectos (311), que es imposible. (86)

COROLARIO III.

324 *La perpendicular à un plano es la linea mas breve, que de un punto fuera de èl se puede tirar al mismo plano* (89); por consiguiente medirà la distancia desde el referido punto al plano (10).

DEFINICION LI.

325 *Planos paralelos* son aquellos, que prolongados al infinito, nunca concurren.

PROPOSICION LXXIX.

THEOREMA. (*Fig.* 143.)

326 *Si una recta* MN *es perpendicular à dos planos* CB, GL, *seràn paralelos.*

DEMONSTRACION.

Si no lo fueren, concurriràn en EF, siendo su comun seccion EF (310). Tomese qualquier punto O en EF, y tirense las rectas OM, ON (56), que por hallarse la una en el plano CBEF, y la otra en el plano GL OF (307), seràn los angulos M, N del triangulo MON rectos (311), que es imposible (86): luego los planos no pueden concurrir; esto es, son paralelos (325). (*Es la* 14. 11. *Eucl.*)

PRO-

PROPOSICION LXXX.

THEOREMA. (*Fig.*144.)

327 *Si dos rectas* AB, BC, *que ſe tocan en* B, *ſon paralelas à otras dos* DE, EF, *que ſe tocan en* E *en otro plano, los planos* AC, DF, *que paſſan por ellas, ſon paralelos.*

DEMONSTRACION.

Deſde B levanteſe la BV perpendicular al plano AC (321), y por V tirenſe VS, VT paralelas à DE, EF (112). Y por quanto BC, VT ſon paralelas à EF, ſeràn paralelas entre sì (318): luego los angulos internos BVT, VBC, ſon igualeſ à dos rectos (82); pero VBC por ſupoſicion es recto, luego tambien lo ſerà BVT (52). Del miſmo modo ſe probarà, que el angulo BVS es recto, por conſiguiente la BV ſiendo perpendicular al pla-

plano AC, y al que paſſa por SVT (312), que es el miſmo DF, los planos ſeràn paralelos (326) (*Es la* 15. 11. *Eucl.*)

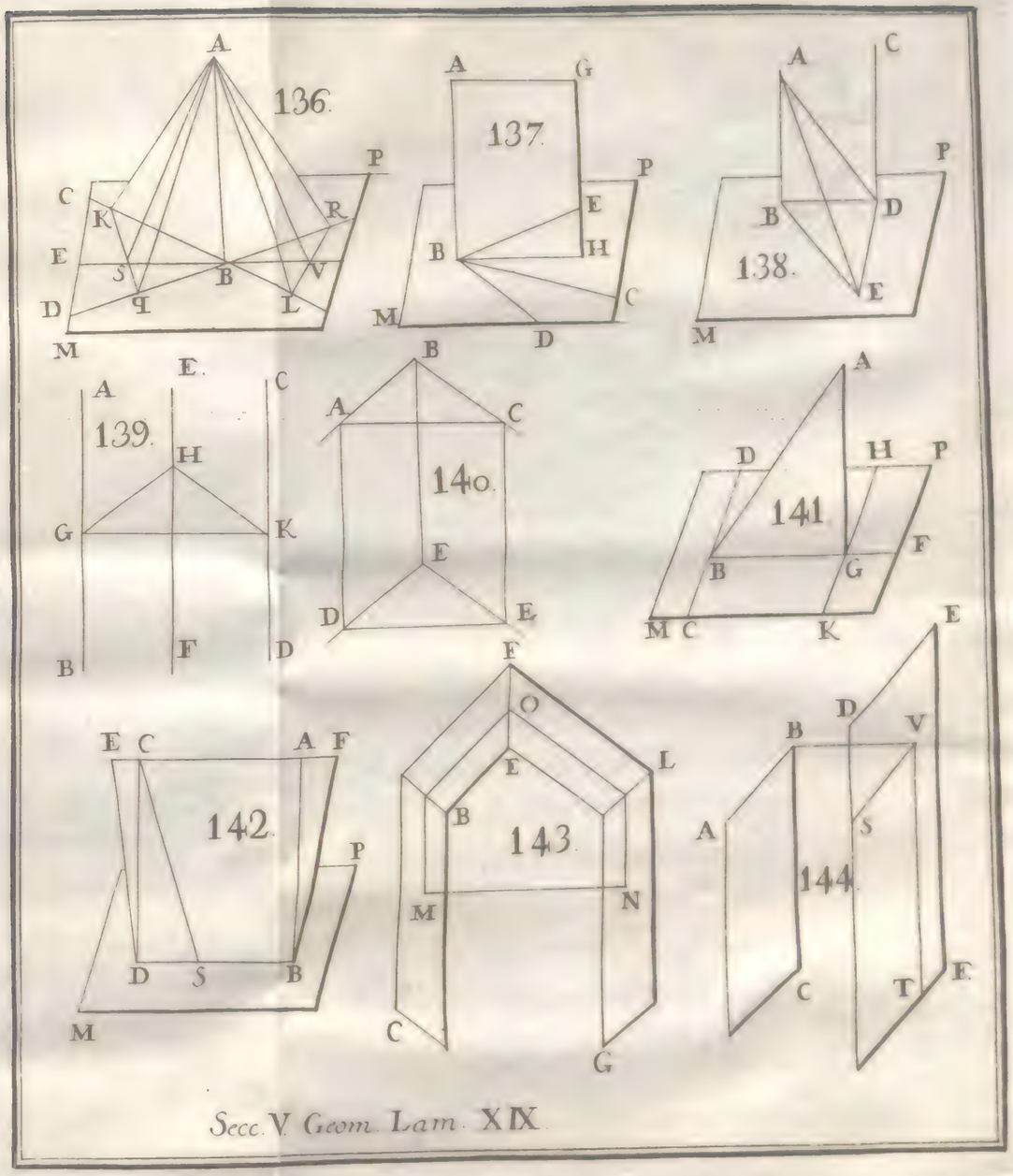
PROPOSICION LXXXI.

THEOREMA. (*Fig.*145.)

328 *Si à dos planos paralelos* MP, QT, *les corta otro* XZ, *las comunes ſecciones* ZV, AX, *ſeràn paralelas.*

DEMONSTRACION.

Porque ſi no lo fueſſen, concurriràn por exemplo en D. Y por quanto la recta ZVD ſe halla toda en un plano (307), como tambien AXD, ſi las rectas concurren, tambien concurriràn los planos, que es contra lo ſupueſto, pues ſon paralelos (325). Que es, &c. (*Es la* 16. 11. *Eucl.*)



Secc. V. Geom. Lam. XIX.

PROPOSICION LXXXII.

THEOREMA. (*Fig.*146.)

329 *Si à dos rectas* AB, CD, *les cortan planos paralelos* MN, OP, QR, *les cortaràn proporcionalmente.*

DEMONSTRACION.

De las comunes ſecciones tirenſe EF, GH, KL (56), y del punto E al punto L la EL, con lo que ſe tendrà el triangulo EFL (35), y el triangulo ELK. Y por quanto los planos paralelos OP, QR cortan al triangulo ELK, ſus comunes ſecciones GS, KL, ſeràn paralelas, y tambien ſeràn paralelas SH, EF (328): luego por la 2. del 6°. (209) ſerà ES: SL = EG: GK, y tambien ES: SL = FH: HL: luego EG: GK = FH: HL (122. *Arith.*), que es, &c. (*Es la* 17. 11. *Eucl.*)

DE-

DEFINICION LII. (Fig.147.)

330 *Un plano se dice perpendicular* à otro MP, quando todas las rectas tiradas en el uno, perpendiculares à la comun seccion, son tambien perpendiculares al otro plano.

PROPOSICION LXXXIII.

THEOREMA. (*Fig.*147.)

331 *Si una recta* AB *fuere perpendicular à un plano* MP, *todos los planos que passen por la referida linea* AB, *seràn perpendiculares al mismo plano* MP.

DEMONSTRACION.

Passe por AB el plano CB, y sea DB la comun seccion (310): de qualquier punto F de ella tirese en el plano DA qual-

qualquier recta FE paralela à BA (112), que ſerà perpendicular á DB (82), y perpendicular al plano MP (317): luego de eſta ſuerte todas las rectas tiradas en el uno, perpendiculares à la comun ſeccion, ſon tambien perpendiculares al otro plano: por conſiguiente el un plano ſerà perpendicular al otro. (330) (*Es la* 18. 11. *Eucl.*)

PROPOSICION LXXXIV.

THEOREMA. (*Fig.*148.)

332 *Si dos planos* AB, CD, *que ſe cortán, ſon perpendiculares à otro* MP, *tambien la comun ſeccion* EF *ſerà perpendicular al miſmo plano.*

DEMONSTRACION.

Porque ſi del punto F ſe levanta una perpendicular, eſta ſerà unica (322), y debien-

biendoſe hallar en ambos planos AB, CD, pues es la comun ſeccion de ellos (310), ſolo lo puede ſer eſta FE. (*Es la* 19. 11. *Eucl.*)

DEFINICION LIII.

333 *Un plano* ſe dice *obliquo á otro*, quando todas las rectas tiradas en el uno perpendiculares à la comun ſeccion, no fueren perpendiculares al otro plano.

DEFINICION LIV.

334 *La inclinacion de un plano à otro* ſe mide por el angulo, que forman dos perpendiculares levantadas en un miſmo punto de la comun ſeccion ſobre ambos planos.

PROPOSICION LXXXV.

THEOREMA. (Fig. 149.)

335 *La inclinacion de un plano à otro, es ſiempre la miſma en qualquier parte.*

DEMONSTRACION.

Porque ſi de los puntos B, E, H, ſe levantan en uno, y otro plano las perpendiculares BC, BA; EF, ED; HK, HG, &c. (322) Sobre la comun ſeccion MN ſeràn BC, EF, HK paralelas, como tambien BA, ED, HG (315): luego los angulos B, E, H, &c. ſeràn iguales (319); por conſiguiente la inclinacion de un plano à otro en qualquier parte, es la miſma. (334)

COROLARIO.

336 *Si el angulo* CBA, *que mide la inclinacion de un plano à otro, fuere recto, el plano* MP, *serà perpendicular sobre* MO; *y obliquo, si fuere obliquo.*

SECCION VI.

DE LOS SOLIDOS.

DEFINICION LV. (Fig. 150.)

337 SI una ſuperficie ABCD ſe mueve à lo largo de una linea AE, la extenſion ABCDEFGH por donde corre, ſe dice *ſólido*, ò *cuerpo*.

COROLARIO I. (Fig. 150.)

338 Conſtando la ſuperficie AD de dos dimenſiones (13) y la linea AE, de una (6), el ſólido AH tendrà tres dimenſiones; qualquiera de ellas AB ſe llama *longitud*, AC *latitud*, y AE *profundidad*, ò *altura*. (2)

COROLARIO II.

339 *La ſeccion de un ſolido ſerà una ſuperficie*, aſsi como la de una ſuperficie lo

lo es una linea, (309) y de una linea un punto. (53)

COROLARIO III.

340 Los *extremos del ſólido ſon ſuperficies*, aſsi como de la ſuperficie lineas (12) y de la linea puntos (5).

DEFINICION LVI. (Fig. 151.)

341 *Angulo ſólido* es la mutua inclinacion de mas de dos rectas AB, CB, DB, que concurren en un punto B, eſtando en diverſos planos.

COROLARIO I. (Fig. 151.)

342 *Para formar un angulo ſólido* B, *ſe neceſsitan à lo menos tres angulos planos* ABC, CBD, ABD, pues por cada dos lineas de las tres paſsa un plano (308).

CO-

COROLARIO II. (Fig. 151.)

343 *Qualesquiera dos angulos* ABC, CBD, *de los tres que formen un angulo solido* B, *deben ser mayores que el tercero*; pues de ser iguales al ABD, ocuparian en una superficie plana su mismo espacio (39. *Arith.*) que es contra la definicion; y de ser menores, dexarian sin ocupar parte de la extension del mismo angulo. (*Es la* 20. 11. *Eucl.*)

COROLARIO III. (Fig. 151.)

344 Asimismo es manifiesto, que *todos los angulos planos* ABC, CBD, ABD, *que componen un angulo solido* B, *deben ser menores que quatro rectos*, pues si fuessen iguales à ellos, tendrian por medida un circulo (133), que es una superficie plana (29. 17.): luego existirian en un mismo plano contra la definicion. (*Es la* 21. 11. *Eucl.*)

COROLARIO IV.

345 Pues que el *angulo* ſólido conſiſte en la inclinacion de las rectas que le forman, ſerà *recto*, ſi fueren entre sì perpendiculares; y *agudos*, *ù obtuſos*, ſi las rectas formaren entre sì angulos agudos, ù obtuſos.

COROLARIO V.

346 Seràn tambien *iguales los angulos ſólidos*, ſi los angulos planos, que los termínan, fueren iguales entre sì cada uno à ſu correſpondiente.

AXIOMA XVI.

347 Los *ſólidos ſeràn totalmente iguales, ſi eſtàn terminados de planos totalmente iguales*; pues de los planos iguales reſultan tambien los angulos ſólidos iguales. (346) y en lo demàs conſta del Art. (47)

AXIO-

AXIOMA XVII.

348 *Los ſólidos ſeràn ſemejantes, ſi eſtàn terminados de planos ſemejantes*; pues de los planos ſemejantes reſultan tambien los angulos planos iguales, por conſiguiente los angulos ſólidos (346); y en lo demàs conſta del Art. (219)

DEFINICION LVII. (Fig. 150.)

349 Si el movimiento de una ſuperficie AD, por una linea AE (337) fueſſe ſiempre paralelo, y uniforme, el ſólido AH ſe denomina *Priſma*, que ſegun el plano AD, que le ſirve de Vaſe, ſe dice *Priſma Triangular*, *quadrilatero*, *pentagono*, *&c.* Si la Vaſe fueſſe un triangulo, quadrilatero, pentagono, &c. Llamandoſe aſsimiſmo *rectangulo*, ſi ſus angulos fueren rectos; y *obliquangulo*, ſi fueren obliquos.

COROLARIO I. (Fig. 150.)

350 No ſolo ſon iguales los planos opueſtos, ò Vaſes del Priſma ADEH, ſino tambien qualquier ſeccion MP paralela à ellos, pues unos, y otros no ſon otra coſa, que el miſmo plano generante AD, quando llegò con ſu movimiento paralelo, y uniforme à los puntos M, E.

COROLARIO II. (Fig. 150.)

351 Ademàs de los planos opueſtos AD, EH del Priſma, eſtà eſte terminado de tantos paraleloſgramos AG, BH, CH, AF, como lados tiene el plano AD, que le ſirve de Vaſe.

COROLARIO III.

352 Para *hallar*, pues, *la ſuperficie* ex-

exterior de un Prisma, se hallarà la de cada paralelogramo de por sì (154), y agregando à la suma las dos Vases, se tendrà la superficie del Prisma.

DEFINICION LVIII. (Fig. 150.)

353 Si el plano AD de la Vase del Prisma fuere un paralelogramo, el Prisma toma el nombre de *paralelepipedo*.

COROLARIO I. (Fig. 150.)

354 La seccion MP paralela à la Vase en un paralelepipedo, serà un paralelogramo igual de la Vase. (350)

COROLARIO II. (Fig. 150.)

355 *En un paralelepipedo, cada dos planos opuestos son paralelogramos totalmente iguales*, segun que es facil demostrar. Por lo que para hallar su superfi-

cie, ſe hallarà la del paralelogramo AD, del paralelogramo BH, y del paralelogramo AF, cuya ſuma doblada darà la ſuperficie del paralelepipedo. (*Es la* 24. 11. *Eucl.*)

COROLARIO III. (Fig. 150.)

356 *Si un paralelepipedo* AFH *ſe divide con un plano* EHDA, *que paſſe por las diagonales de los planos opueſtos* EH, AD, *reſultaràn los Priſmas iguales* EGHACD, EFHABD (347). Pues los planos que los terminan, ſon iguales, eſto es, el triangulo EGH, y el EFH, como tambien el triangulo ACD, y el ABD (95); el paralelogramo AF, y el paralelogramo CH (355); el paralelogramo AG, y el BH, y ultimamente el plano diagonàl comun. (*Es la* 28. 11. *Eucl.*)

COROLARIO IV. (Fig. 152.)

357 *Los paralelepipedos ſemejantes*

AH

AH *ab*, *tienen proporcionales ſus tres dimenſiones*. Pues baxadas las CM, *cm* perpendiculares ſobre AB, *ab* (106), ſeràn los triangulos ACM, *acm* ſemejantes, ſiendo los angulos M, *m* rectos (24), y los angulos A, y *a*, tambien iguales por ſuperficion (224): luego AC; *ac*=CM: *cm* (219); pero por la ſimilitud de los planos, AC: *ac*=AB: *ab* (219): luego AB: *ab*=MC: *mc* (122. *Arith.*). Tambien baxadas las perpendiculares FR: *fr* (106) alturas de los planos BH, *bh*, y de los paralelepipedos AH, *ah* (141), ſe tendràn del miſmo modo los triangulos ſemejantes FBR, *fbr* (224): luego BF: FR=*bf*: *fr* (219): pero AB: *ab*=FR: *fr* (219): luego AB: *ab*=FR: *fr* (122. *Arith.*); de ſuerte, que por igualdad de razones (122. *Arith.*) AB, MC, FR, ſon proporcionales con *ab*, *cm*, *fr*.

COROLARIO V. (Fig. 153.)

358 *Si un paralelepipedo* AF *ſe divide*

de con planos BH, CG *paralelos à los planos opueſtos, ſerà el ſólido al ſólido, como la Vaſe à la Vaſe*; pues ſi la Vaſe AE ſe ſupone dividida en tres partes iguales AN, BO, CE, los ſólidos AH, BG, CF, lo ſeràn tambien (347): luego el total AF con qualquiera de ellos AH, ſerà como la Vaſe AE à la Vaſe AN (143. *Arith.*): por conſiguiente los ſólidos tendràn entre sì la razon de ſus Vaſes (122. *Arith.*) (*Es la* 25. 11. *Eucl.*)

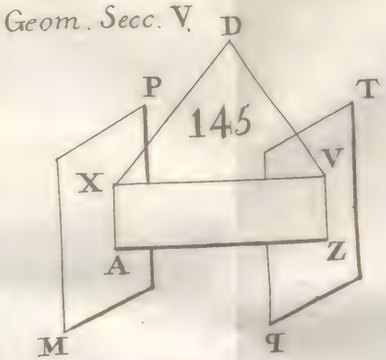
COROLARIO VI. (Fig. 153.)

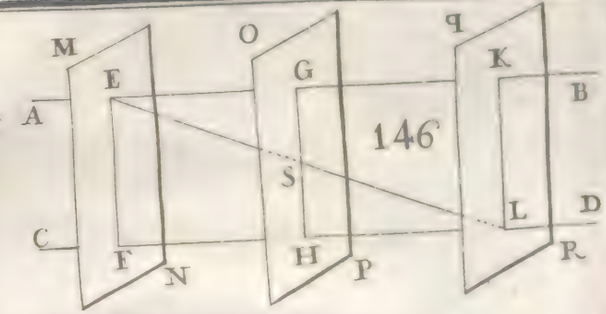
359 Reſpecto de que los paralelogramos partes de la Vaſe AE, tienen una miſma altura; ſeràn como ſus Vaſes AB, BC, CD (143): luego en eſta miſma eſtàn los ſólidos AH, BG, CF. (122. *Arith.*)

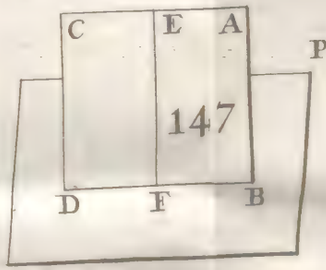
DEFINICION LIX.

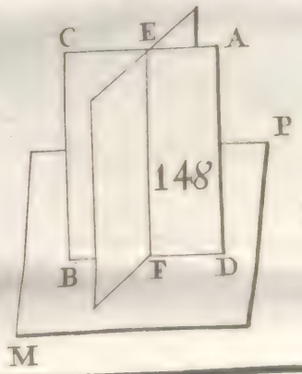
360 *Cubo* es el paralelepipedo rectan-

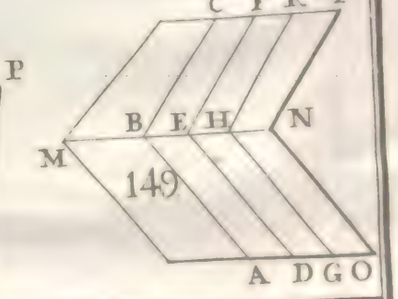
Geom. Secc. V.



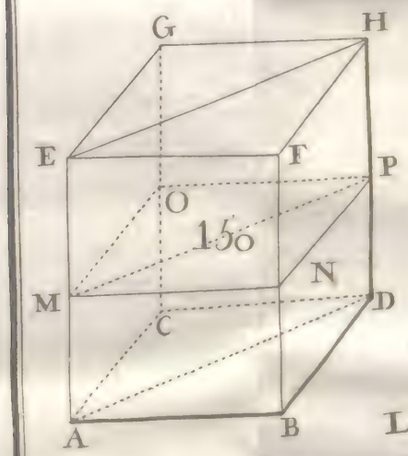


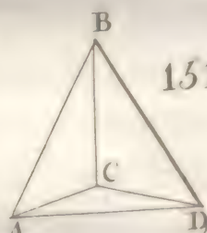


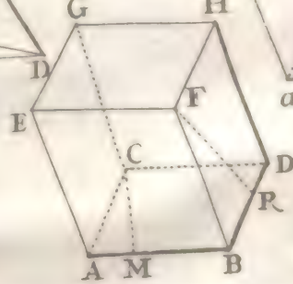


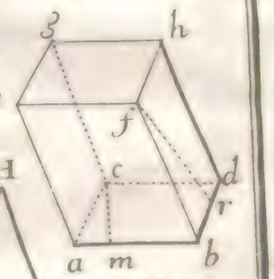


Geom. Secc. VI.









Lam. XX.

tangulo, terminado de seis quadrados iguales.

COROLARIO.

361 Por lo que hallado el valor de un quadrado, y multiplicado por 6. darà la superficie del cubo.

DEFINICION LX. (Fig. 154.)

362 Si el Prisma ABCD tuviere por Vase un circulo, se conoce entonces por el nombre de *Cylindro*. Si la recta MN, que une los centros de las Vases, es perpendicular à ellas, se dice Cylindro *recto*; y *escaleno*, si fuere obliqua. Aqui principalmente se trata del Cylindro recto.

COROLARIO I.

363 Son, pues, las Vases del Cylindro, y qualquier seccion paralela à ellas, circulos iguales.

CO-

COROLARIO II. (Fig. 154.)

364 Puede, ſegun eſto, conſiderarſe la generacion del Cylindro recto, ſi ſe imagina que el rectangulo MNDB dà una revolucion entera al rededor de MN, como Exe.

COROLARIO III. (Fig. 154.)

365 *La ſuperficie exterior del Cylindro recto ſin las Vaſes, es igual à un rectangulo, ò producto de la periferia del circulo de ſu Vaſe por la altura del Cylindro.* Pues imaginando circunſcripto à cada circulo de las Vaſes, el Poligono regular de mayor numero de lados poſsible, y tirando rectas de unos angulos à otros, ſe tendrà circunſcripto al Cylindro el ultimo priſma. Baxo cuyo ſupueſto, y dado que *ac*, *eg*, ſean los lados de eſtos Poligonos, la razon de la ſuperficie Cylindri-

drica *fhbd* terminada por la altura *ae* del Cylindro, y por el pequeño arco *bd*, serà la mas inmediata à la igualdad, assi como la del lado *ac* al arco *bd* (279): luego iguales (280); luego seràn proporcionales la superficie del Prisma à la superficie Cylindrica, como el lado *ac* al arco *bd*; pero el paralelogramo rectangulo *ag* se halla multiplicando la Vase *ac* por su altura (145), luego por esta misma se deberà multiplicar el arco *bd* para tener la pequeña superficie Cylindrica; por consiguiente la de todo el Cylindro, compuesta de innumerables de estas pequeñas superficies, se tendrà multiplicando la periferia de su Vase por toda la altura.

EXEMPLO.

Supongase el diametro = 10°... 1′ ... 6; por lo que su circunferencia serà = 33°, sea la altura AC = 8°... 1: luego multiplicando uno por otro, da-

rà

rà 275°. por la ſuperficie del Cylindro ſin las Vaſes.

COROLARIO IV.

366 *Los Cylindros rectos ſeràn ſemejantes, ſi tienen proporcionales los diametros de ſus Vaſes con ſus alturas.* Pues en quanto à los circulos de las Vaſes, todos por ſu naturaleza ſon ſemejantes (221); y en quanto à las ſuperficies Cylindricas, eſtas ſon iguales à unos rectangulos hechos de la periferia de la Vaſe por la altura del Cylindro (365); pero los diametros ſon proporcionales con ſus periferias (290): luego en los Cylindros ſemejantes ſeràn proporcionales las circunferencias con las alturas de los Cylindros, que ſiendo los lados de los referidos rectangulos, ſeràn eſtos ſemejantes (219). Luego los Cylindros, que tengan ſus diametros proporcionales con ſus alturas, tendràn las ſuperficies, que

los

los termínan, ſemejantes: eſto es, los Cylindros ſeràn ſemejantes. (348)

DEFINICION LXI. (Fig. 155.)

367 *Pyramide* ſe llama un ſólido terminado de tantos triangulos concurrentes por ſus Vertices en un punto D, como lados tiene el plano ABC, que le ſirve de Vaſe. Si eſta fuere un triangulo, ſe dice *Triangular*: ſi quadrilatero, *Quadrilatera*, *&c.* tomando ſiempre la denominacion del plano de ſu Vaſe.

COROLARIO I.

368 La ſuperficie exterior de la Pyramide ſerà igual à la ſuma de los triangulos, que la terminan, ademàs del plano de la Vaſe.

COROLARIO II. (Fig. 156.)

369 *Qualquier ſeccion* EFG *hecha en*

una

una Pyramide paralela à la Vaſe, es un plano ſemejante à la Vaſe. Pues ſupueſto en eſte caſo ſea un triangulo, ſe tendrà, que por ſer EF paralela à AC, ſerà DF: DC=FE: CA (209); y tambien por ſer FG paralela à CB, ſerà DF: DC=FG: CB (209): luego FE: CA=FG:CB (122. *Arith.*) y alternando FE· FG=CA: CB (142. *Arith.*): Del miſmo modo ſe probarà, que FG: GE=CB: BA, y que FE: EG=CA: AB: luego teniendo los tres lados del uno proporcionales à los tres del otro, los triangulos ſeràn ſemejantes (226). Igualmente ſe prueba en Pyramides poligonas.

DEFINICION LXII. (Fig. 157.)

370 Si la Vaſe de la Pyramide es un circulo, entonces toma el nombre de *Cono*, como ABC; que ſe dice *recto*, ſi la recta CO baxada del vertice C al centro O del circulo fuere perpendicular,

y *escaleno*, si fuere obliqua. Principalmente se trata aqui del recto.

COROLARIO I. (Fig. 157.)

371 La seccion MN, paralela à la Vase AB en el cono, es un circulo.

COROLARIO II. (Fig. 157.)

372 Si el triangulo rectangulo COB dà una revolucion al rededor de CO, como Exe, formarà un cono recto.

COROLARIO III.

373 La *superficie exterior de un cono recto es igual à un triangulo, cuya Vase sea la periferia del circulo de la Vase, y su altura el lado* CB *del cono.* Pues imaginando circunscripto al circulo de la Vase el ultimo Poligono regular, y tirando à sus angulos rectas desde el Vertice C,

ſe tendrà la ultima Pyramide poligona circunſcriptible al cono. Segun lo qual, y ſupueſto *ac* uno de los lados del Poligono, vaſe del triangulo *a*C*c*, ſe demoſtrarà aqui del miſmo modo, que en el articulo (365), que el ſector conico *l*C*d*, es igual al producto del pequeño arco *bd* por la mitad de la perpendicular CD=al lado CB del cono: por conſiguiente toda la ſuperficie del cono ſerà igual al producto de la periferia ſuma de los pequeños arcos por la mitad del lado del cono: eſto es, que ſerà igual à un triangulo, cuya vaſe ſea la periferia del circulo de ſu vaſe, y ſu altura el lado del cono.

EXEMPLO.

Sea el diametro=10°...1′...6″ ſerà ſu circunferencia=33°: ſea el lado del cono=10°: por lo que multiplicando 5° por 33, darà 165°. quadradas por la ſuperficie conica.

CO-

COROLARIO IV. (Fig. 157. 158.)

374 Los conos rectos ſeràn ſemejantes, ſi tienen proporcionales los diametros de ſus Vaſes con ſus alturas, ò exes; pues por lo que mira à los circulos de las Vaſes, por ſu naturaleza ſon ſemejantes (221); y en quanto à las ſuperficies cónicas, ellas ſon iguales à unos triangulos, cuyas Vaſes ſean las periferias, y ſus alturas los lados de los conos (373): pero las periferias ſon proporcionales à los diametros (290), y los lados de los conos à ſus alturas (229), atento de que los triangulos rectangulos DOC, HFG por ſupoſicion tienen BC. BO=GF: FH: luego en los conos rectos ſeràn proporcionales las periferias de ſus Vaſes con los lados; por conſiguiente los triangulos rectangulos formados de ellos, è iguales à las ſuperficies cónicas, ſon ſemejantes (229): luego los conos tambien lo ſon. (348)

DEFINICION LXIII. (Fig.159.)

375 Si un ſemicirculo ACB dà una revolucion entera al rededor de ſu diametro AB, como exe, producirà un ſólido llamado *eſphera*. El punto O centro del ſemicirculo, ſe dice tambien *centro* de la eſphera.

COROLARIO I.

376 En la eſphera todas las rectas tiradas deſde el centro à la ſuperficie eſpherica, ſon iguales entre sì; dicenſe aſsimiſmo *radios*, y ſus dobles *diametros*.

COROLARIO II. (Fig.159.)

377 Si una eſphera ſe corta por qualquier parte, la ſeccion ſerà un circulo. Si paſſa por el centro O, el diametro AB ſerà el diametro de la ſeccion; y ſi paſ-

passa por qualquier otra parte EF, el diametro de la seccion serà la cuerda EF: Por consiguiente todos los circulos que passan por el centro, son iguales entre sì, y mayores que los demàs, pues sus diametros son mayores: aquellos se dicen *maximos*; y estos *menores*.

COROLARIO III.

378 Si una esphera se corta con un plano, que passe por el centro, dividirà assi la esphera, como su superficie en dos partes iguales: cada segmento se dice *emisferio*.

DEFINICION LXIV.

379 *Solido regular* es el que està terminado de planos regulares, è iguales entre sì. Qualquier otro sólido se dice *irregular*.

COROLARIO I.

380 Si se quiere terminar el sólido regular de triangulos equilateros, solo puede ser con quatro, con ocho, y con veinte triangulos, equilateros; pues debiendo los angulos planos, que termínan un angulo sólido, ser menores que quatro rectos (344) sucede esto en el sólido regular terminado de quatro triangulos equilateros, de los quales tres angulos = 3.60° = 180°. componen el angulo sólido; Tambien en el sólido terminado de ocho triangulos equilateros, de los quales quatro angulos = 4.60° = 240°. componen su angulo sólido; y assimismo en el sólido terminado de veinte triangulos equilateros, de los quales cinco angulos = 5.60° = 300°. componen su angulo sólido. De seis de estos angulos = 6.60° = 360°. no se podrà disponer angulo sólido, pues los planos son iguales à quatro rectos. El sólido ter-

terminado de quatro triangulos equilateros, ſe llama *tetaedro*, el de ocho *octaedro*, y el de veinte *icoſaedro*.

COROLARIO II.

381 Si ſe quiere terminar el ſólido regular con quadrados, ſolo podrà ſer uno, que es el *cubo*, llamado tambien *exaedro*; pues tres angulos de quadrado, que en èl concurren à formar angulo ſólido, ſon menores que quatro rectos: quatro quadrados concurrentes por ſus angulos, ya ſe vè forman una ſuperficie plana.

COROLARIO III.

382 Si el ſólido regular ſe quiere terminar con pentagonos, ſolo puede haver uno, que llaman *Dodecaedro*, por eſtàr terminado de doce pentagonos; pues en èl concurren tres angulos de pentagono = 3.108 = 324°. menores,

que quatro rectos, para formar su angulo sólido. De quatro angulos de Pentagono = 4. 108 = 432°. ya se vè no se puede formar angulo sólido. Como ni tampoco de tres angulos del exagono = 3. 120° = 360°. por consiguiente no puede haver en la naturaleza mas sólidos regulares, que los referidos.

COROLARIO IV.

383 Los sólidos regulares de un mismo nombre, son semejantes entre sì. (348)

COROLARIO V.

384 Qualquier sólido regular puede inscribirse, ò circunscribirse à la esphera.

SCHOLIO.

385 De estos sólidos trata Euclides en

en los Libros 13, 14, y 15, de sus Elementos, considerandolos en sì, comparados unos con otros, è inscriptos, y circunscriptos à la esphera. Para nosotros basta la noticia de ellos.

DEFINICION LXV.

386 *Elemento* de la extension, ò espacio, es la parte de este, menor que qualquiera dada, ò dable.

COROLARIO I.

387 El Elemento, pues, como parte que es, dirà relacion al todo; por consiguiente ambos serán de una misma especie. (2. *Pr. Ns.*)

COROLARIO II.

388 Luego *el elemento de las lineas serà en la realidad una linea; el elemento*

de

de las ſuperficies, una ſuperficie; y el elemento de los ſólidos, un ſólido, bien que unos, y otros los menores dables en ſu eſpecie.

AXIOMA XVIII.

389 *Dos lineas, ſuperficies, ù ſolidos, ſeràn iguales, ſi ſe componen de igual numero de elementos entre sì iguales.*

AXIOMA XIX.

390 *La altura de una figura expreſſa el numero de ſus elementos.*

AXIOMA XX.

391 *Los elementos ſuperficiales, ù ſólidos, que tienen iguales Vaſes, y una miſma altura, ſon iguales*, eſto es, que ſi las dos Vaſes, que termínan un elemento, fueren iguales à las dos que termínan el otro, cada una à ſu correſpondiente, te-

teniendo por altura un elemento de la altura, ſeràn iguales, pues entre unos miſmos extremos ſe ſupone la minima extenſion dable.

COROLARIO I. (Fig. 160.)

392 *Los priſmas, que tienen iguales Vaſes, y altura, ſon iguales.* Pues ſi para facilitar la explicacion ſuponemos los priſmas expreſſados por los paralelogramos AD, AF (351), y cortados con planos paralelos à la Vaſe, tantos en numero, como elementos, tiene ſu altura AC, reſultarà igual numero en uno, y en otro Priſma (390); y como las Vaſes de qualeſquiera de eſtos elementos *ad*, *eh*, ſean iguales à una miſma AB (350), ſeràn iguales entre sì (28. *Arith.*); por conſiguiente los elementos (391): luego tambien los ſólidos (389). Eſta propoſicion, como ſe vè, es general para los paralelepipedos, priſmas, y cylin-

dros,

dros, que comprehende el nombre generico de prisma; y assi se incluyen aqui *las proposiciones* 29, 30, *y* 31. *del* 11. *de Euclides*, que dicen, que *los paralelepipedos, que tienen una misma, ò iguales Vases, y alturas, son iguales.*

COROLARIO II. (Fig. 161.)

393 *Las pyramides, que tienen iguales Vases, y altura, son iguales.* Pues si del mismo modo para facilitar la demonstracion, expressamos las pyramides por los triangulos ABC, ADB, (367) teniendo estos una misma altura, havrà igual numero de elementos en uno, que en otro (390) Y si atendèmos à que cortadas las pyramides con planos paralelos à la Vase, las secciones son semejantes à la Vase (369), y sus lados homologos *ac*, *eg*, iguales, como es facil reconocer; serán estas secciones tambien iguales, pues estàn como los quadrados de los lados homo-

mologos (260); esto es, que en los elementos *ad*, *eb*, la Vase *ac* es igual à la Vase *eg*, y la Vase *bd* igual à la Vase *fh*: luego los elementos serán iguales (391): por consiguiente los sólidos totales ACB, ADB (389): ya sean pyramides, ò conos, pues con unos, y otros habla la demonstracion.

Que *ac* sea igual *eg*, se demuestra assi. En los triangulos semejantes ACB, *a*C*c* (223), son proporcionales C*c*: *c*B ==*ca*: BA (219), y en los triangulos assimismo semejantes (223) DBA, D*ge*, son proporcionales D*g*: DB==*ge*: BA (219); pero D*g*: DB==C*c*: CB, en los triangulos semejantes B*cg*, BCD (219, 223): luego *ac*:AB==*eg*:AB (122.*Arith.*) por consiguiente *ac*==*eg*, (121. *Arith.*)

DEFINICION LXVI. (Fig.162.)

394. *Medida de los sólidos* es un cubo AEG,

AEG, cuyo lado AB es igual à la recta, que arbitrariamente se tomò por medida de las lineas. (139)

DEFINICION LXVII.

395 Hallar la *area de un sólido*, es buscar quantos cubos contiene de aquel que se tomò por medida.

PROPOSICION LXXXVI.

PROBLEMA. (*Fig.*163.)

396 *Hallar la solidèz de un paralelepipedo rectangulo* EBD.

RESOLUCION.

Multipliquese su Vase AD por su altura AE, y el producto serà su solidèz.

DE-

DEMONSTRACION.

Supongaſe, que el lado AB es igual à 4 pies; el lado AC de 3 pies, y la altura AE de 6: dividanſe en eſtas miſmas partes los referidos lados, como tambien ſus opueſtos iguales, con lo que paſſando planos ſecantes de unas diviſiones à otras ſus correſpondientes, quedarà el ſólido total dividido en varios cubos, cada uno de un pie de lado, ſegun que es facil comprehender, atendiendo al paraleliſmo de las lineas. El paralelepipedo HBD, que tiene ſu altura AH igual un pie, y ſu Vaſe AD igual 3.4 = 12 pies quadrados, contendrà 12 de eſtos cubos; luego conſtando el paralelepipedo EBD de tantos paralelepipedos iguales al HBD, como pies hay en la altura AE, ſe deberà multiplicar el valor de uno de ellos igual 12 cubos, por el valor de la altura AE igual 6: eſto es, que en el caſo propueſto, la ſolidèz del pa-

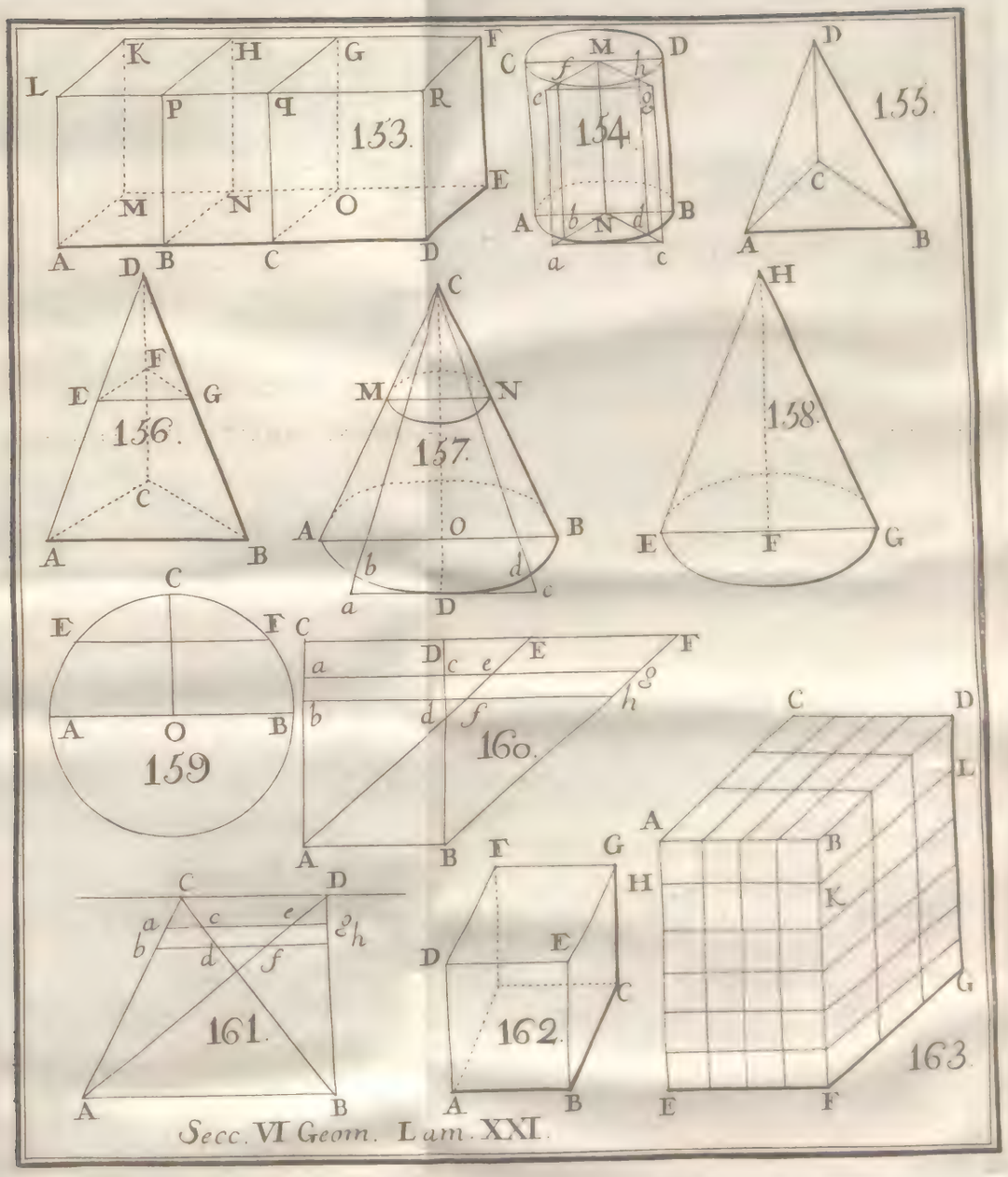
paralelepipedo ſerà igual 12. 6 = 72. pies cubicos. (395)

COROLARIO I. (Fig. 164.)

397 *Para hallar la ſolidèz de un cubo*, ſe multiplicarà ſu lado AB por sì miſmo, para tener el quadrado AD de ſu Vaſe (146), y el producto otra vez por el miſmo lado, para tener el cubo, ò paralelepipedo rectangulo EBD.

COROLARIO II.

398 Conſtando la vara linear de tres pies, contendrà la cubica 3.3.3 = 27. pies cubicos; el pie cubico tendrà 12. 12. 12 = 1728. pulgadas cubicas; la pulgada cubica 12. 12. 12 = 1728. lineas cubicas; y la linea cubica 12. 12. 12 = 1728. puntos cubicos.



Secc. VI Geom. Lam. XXI.

DEFINICION LXVIII. (Fig. 164.)

399 *Pie cubico corriente ſobre vara* ſe dice un paralelepipedo rectangulo, que por altura AM tiene un pie, y por vaſe una vara quadrada AD. *Pulgada cubica corriente ſobre vara*, es aſsimiſmo un paralelepipedo rectangulo, que por altura AK tiene una pulgada, y por vaſe una vara quadrada AD. Si el paralelepipedo tiene por vaſe la miſma vara quadrada, y por altura una linea, ò punto, reſultarà una *linea, ò punto cubico corriente ſobre vara.*

COROLARIO I.

400 Todos eſtos paralelepipedos ſon entre sì como los pies, pulgadas, &c. de ſus alturas (359).

COROLARIO II.

401 Asi se podrà aplicar aqui para los sólidos, lo que en los Articulos (150, 151) prevenimos para el cálculo de las superficies.

PROPOSICION LXXXVII.

PROBLEMA. (*Fig.*165.)

402 *Hallar la solidèz de un paralelepipedo obliquangulo* AFH.

RESOLUCION, Y DEMONSTRACION.

Multipliquese su vase AD por la altura, ò perpendicular HK, baxada desde qualquier angulo H sobre la vase AD (320), y el producto serà la solidèz (396); pues es igual à un rectangulo de la misma vase, y altura (392).

EXEM-

EXEMPLO.

Sea AB = 4°... 2′ ; AC perpendicular sobre AB = 3°... 1′ , y KH = 8°... ó.

AB = 4°.... 2″
AC = 3°.... 1′

por 3°) ... 14°.... 0.
por 1′) ... 1.... 1.... 8″

Superficie AD = 15.... 1..... 8′

Superficie AD = 15°.... 1′ ... 8″
Altura HK = 8°

Sólido..... 124°.... 1′ .... 4″

De suerte , que la solidèz del referido paralelepipedo es igual à 124 varas cubicas, 1 pie cubico corriente sobre vara , y 4 pulgadas cubicas corrientes sobre vara.

COROLARIO I.

403 *Los paralelepipedos, que tienen una miſma altura, ſon entre sì como ſus vaſes*: (*Es la* 32. 11. *Eucl.*) y ſi tienen una miſma vaſe, ſon como ſus alturas.

COROLARIO II. (Fig. 166.)

404 *Los paralelepipedos* AG, HQ, *eſtàn en razon compueſta de ſus vaſes, y alturas*; pues ſi hacemos la razon compueſta de la vaſe DG à la vaſe NQ, y de la altura GC à la altura QM, ſe tendrà $\frac{DG}{NQ}.\frac{GC}{QM}$ (150. *Arith.*); pero DG. GC es la ſolidèz del paralelepipedo AG (396), y NQ. QM, es la ſolidèz del paralelepipedo HQ (402): luego eſtos eſtàn en razon compueſta de ſus vaſes, y alturas.

COROLARIO III. (Fig. 167.)

405 Los *paralelepipedos ſemejantes* AE;

AE: KO *estàn en razon triplicada de sus lados homologos* AB, KL ; pues hecha la razon compuesta de las dimensiones del uno AB, ZU, HD, y de las dimensiones del otro KL, ST , RN , se tendrà $\frac{AB.}{KL}\frac{ZU}{ST}\frac{HD}{RN}$ (150. *Arith.*) , la qual por componerse de tres razones iguales (357) , serà triplicada de qualquiera de ellas $\frac{AB}{KL}$ (151. *Arith.*); pero AB, ZU, HD es la solidèz del paralelepipedo AE (402) , y KL. ST. RN es la solidèz del paralelepipedo KO (402): luego el paralelepipedo AE al paralelepipedo KO està en razon triplicada de sus lados homologos AB, KL, ò de qualesquiera otros dos lados homologos , si se comparan las dimensiones del sólido en la debida forma. (*Es la* 33. 11.*Eucl.*)

COROLARIO IV. (Fig.167.)

406 *Los paralelepipedos semejantes* AE, KO, *estàn como los cubos de sus lados homologos* AB, KL ; pues los cubos de es-

tos lados, como sólidos semejantes, que son (348) estàn tambien en razon triplicada de los mismos lados AB, KL.

COROLARIO V. (Fig. 168.)

407 *Si quatro rectas* M, N, O, P, *fueren continuas proporcionales, el paralelepipedo de la primera* M *al semejante de la segunda* N *estarà como la primera à la quarta*; pues estas tambien estàn en razon triplicada de la primera à la segunda. (153. *Arith.*)

COROLARIO VI. (Fig. 168.)

408 *Si quatro, ó mas rectas*, M, N, O, P, *fueren proporcionales, los paralelepipedos semejantes, y semejantemente puestos sobre ellas, serán proporcionales; y si los paralelepipedos lo fueren, tambien lo serán sus lados homologos.* (*Es la* 37. 11. *Eucl.*)

COROLARIO VII. (Fig. 169.)

409 *Si tres rectas* M,N,O *fueren proporcionales, el paralelepipedo rectangulo hecho de las tres, es igual al cubo de la media,* pues por ſer proporcionales, ſerà el rectangulo de M por O igual al quadrado de N (244): luego ſi tomamos por vaſes de eſtos paralelepipedos los planos referidos, y los multiplicamos, ò les damos la altura comun de la media N, los productos (33. *Arith.*) ò ſólidos (396) ſeràn iguales. (*Es la* 36. 11. *Eucl.*)

COROLARIO VIII. (Fig. 170.)

410 *Los paralelepipedos* AG,HP *iguales, tienen reciprocas ſus vaſes, y alturas; y ſi tienen reciprocas ſus vaſes, y alturas, ſeràn iguales.* Pues en el primer caſo, ſiendo el producto DG, GC ſolidèz del un paralelepipedo (402) igual al producto

de MP, PL, ſolidèz del otro paralelepipedo, ſerà DG: MP=PL: GC; y en el ſegundo caſo, ſiendo DG: MP=PL: GC, ſerà DG. GC=MP. PL. (131, 132. *Arith.*) (*Es la* 34. 11. *Eucl.*)

COROLARIO IX. (Fig. 171.)

411 Los Priſmas triangulares ſon la mitad de ſus correſpondientes paralelepipedos (356): luego para hallar ſu ſolidèz ſe multiplicarà igualmente el triangulo DEF de ſu vaſe por la altura DA. (402.)

COROLARIO X. (Fig. 172.)

412 Y por quanto qualquier Priſma, poligono AH, ſe puede dividir en triangulares, dividiendo ſus vaſes en triangulos, y paſſando por las diviſiones planos ſecantes: para *hallar la ſolidèz de un Priſma qualquiera*, ſe deberà del miſmo

mo modo multiplicar ſu vaſe LKHGF, ſuma de las vaſes triangulares, por toda la altura LC.

COROLARIO XI.

413 Por conſiguiente *los Priſmas tendràn las miſmas propriedades, que los paralelepipedos*; eſto es, que los que tienen una miſma altura, ſon como ſus vaſes, y ſi tienen iguales vaſes, ſon como ſus alturas (403); eſtaràn en razon compueſta de ſus vaſes, y alturas (404); los ſemejantes eſtaràn en razon triplicada de ſus lados homologos (405), ò como los cubos de ſus lados homologos (406), ò como la primera à la quarta de quatro continuas proporcionales à ſus lados homologos (407); que ſi quatro, ò mas rectas fueren proporcionales, tambien lo ſeràn los Priſmas ſemejantes ſobre ellas, como lados homologos deſcriptos; y al contrario (408); y que ſi tie-

nen

nen ſus vaſes, y alturas reciprocas, ſon iguales, y al contrario. (410)

PROPOSICION LXXXVIII.

PROBLEMA. (*Fig.* 173.)

414 *Hallar la ſolidèz de un cylindro* AD.

RESOLUCION.

Multipliqueſe como en los Priſmas el circulo AB de ſu vaſe por ſu altura AC, ya ſea el cylindro recto, ò inclinado (392).

DEMONSTRACION.

Supongaſe circunſcripto à cada vaſe el ultimo poligono regular de mayor numero de lados dable, y ſean dos de eſtos *ac*, *fh*; tirenſe de los centros *e*, *l*, las *ea*, *ec*, *lf*, *lh*, y paſſando planos ſecantes por

por ellas, reſultarà el Priſma *flbeac* triangular, y el ſector cylindrico *bdeglk*, cuya razon por ſuposicion, es la mas inmediata à la igualdad, aſsi como la del triangulo *aec* al ſector *bed* (279): luego ſon iguales (280): por conſiguiente ſeràn proporcionales el Priſma al ſector cylindrico, como el triangulo al ſector; pero la ſolidèz del Priſma ſe tiene multiplicando ſu Vaſe *aec* por la altura *af*: (411) luego la del ſector cylindrico ſe tendrà multiplicando el ſector de ſu vaſe *bed* por la miſma altura *af*; en cuya conformidad la ſolidèz de todo el cylindro compueſto de eſtos pequeños ſectores cylindricos, ſerà igual al producto del circulo de la vaſe por la miſma altura. La demoſtracion ſe ha ſupueſto en un cylindro recto, pues lo miſmo vale de los eſcalenos (392).

EXEMPLO.

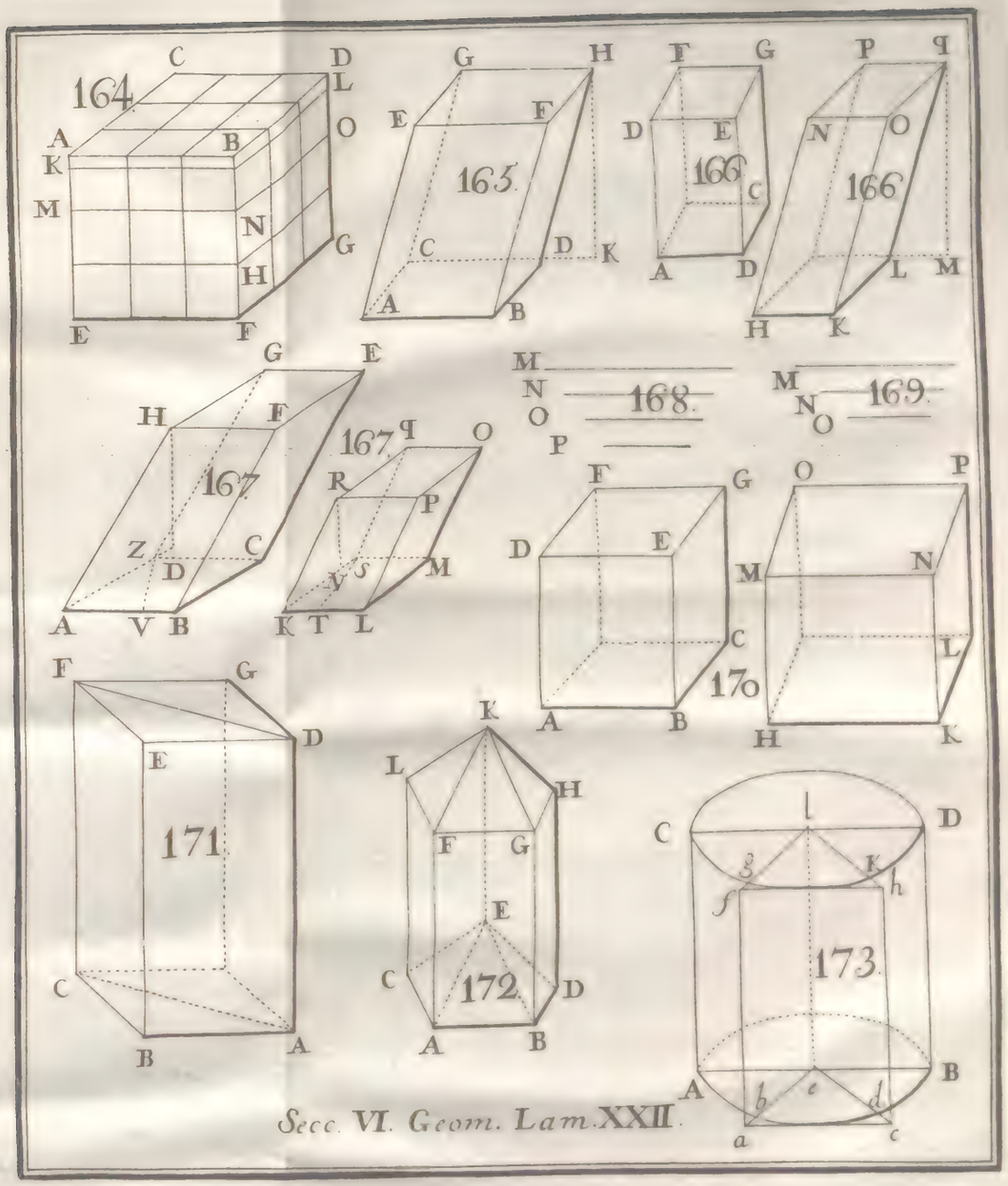
Supongaſe el diametro = 8°: luego ha-

haciendo la proporcion como 14 à 11, asi 64 quadrado de 8 à $\frac{64.11}{14} = \frac{32.11}{7} = \frac{352}{7} = 50^{\circ} + \frac{2}{7}$. por la area de la vase, y supuesta la altura del cylindro $= 7^{\circ}$. darà $7.(50 + \frac{2}{7}) = 352^{\circ}$. varas cubicas.

COROLARIO.

415 Los cylindros, assi como los Prismas (413), que tienen una misma altura, son como sus vases; y si tienen iguales vases, son como sus alturas: estàn en razon compuesta de sus vases, y alturas; los semejantes estàn en razon triplicada; ò como los cubos de sus lados homologos; si quatro, ò mas rectas fueren proporcionales, tambien seràn proporcionales los cylindros semejantes descriptos sobre ellos, y al contrario: los cylindros iguales tienen reciprocas sus Vases, y alturas, y al contrario, &c. como en los Prismas.

PRO-



Secc. VI. Geom. Lam. XXII.

PROPOSICION LXXXIX.

PROBLEMA. (*Fig.*174.)

416 *Hallar la ſolidèz de una Pyramide triangular* ABCD.

RESOLUCION.

Multipliqueſe el triangulo ADB, de ſu vaſe por el tercio de la altura CK.

DEMONSTRACION. (Fig.175.)

Conſiſte à probar, que *la Pyramide triangular es el tercio del Priſma de la miſma vaſe, y altura* (*Es la* 7. 12. *Eucl.*); pues la ſolidèz del Priſma es igual al producto de ſu vaſe por toda la altura (411). En el Priſma triangular AE tirenſe las rectas DC, DB, EC diagonales de los paralelogramos que lo terminan,

y

y reſultaràn tres Pyramides DACB, DFEC, DCBE. Las Pyramides ADCB, DCEF, tienen las Vaſes ACB, DFE igua-les (95) y una miſma altura DA: luego ſon iguales (393): aſsimiſmo las Pyra-mides ACBD, DECB, tienen iguales ſus vaſes ABD, DBE (95), y un miſmo Cuſ-pide en C: luego tambien ſon iguales (393); por conſiguiente ſiendo todas tres iguales entre sì (28. *Arith.*) cada una ſerà el tercio de el Priſma.

EXEMPLO. (Fig. 175.)

Sea la vaſe ACB un triangulo rectan-gulo, cuyo lado AB ſea = 4°: y la mi-tad de AC = 3: por lo que ſu ſuperficie ſerà = 12°. Sea la altura AD perpendi-cular ſobre el plano ACB = 9: cuyo ter-cio es 3: multipliqueſe, pues, 12 por 3, y el producto 36 varas cubicas ſerà la ſolidèz de la Pyramide. Si AC no fuere perpendicular ſobre AB, ſe baxarà deſ-

de

de el punto C la perpendicular ſobre AB (106); y ſi tampoco DH, fuere perpendicular ſobre el plano de la vaſe, ſe deberà baxar tambien (320), para multiplicar entre sì las dimenſiones perpendiculares.

COROLARIO I. (Fig. 176.)

417 Reſpecto de que qualquier Pyramide Poligona CBF ſe puede reſolver en las triangulares FCAD, FABD, FBDE, para *hallar la ſolidèz de una Pyramide poligona*, ſe multiplicarà del miſmo modo ſu vaſe por el tercio de ſu altura; pues reſulta el tercio del Priſma poligono de la miſma vaſe, y altura.

COROLARIO II.

418 Aqui ſe debe tener por repetido lo dicho al articulo 413. de los Priſmas, cuyos tercios ſon las Pyramides.

PROPOSICION XC.

PROBLEMA. (Fig. 177.)

419 *Hallar la ſolidèz de un cono* ABD.

RESOLUCION.

Multipliqueſe, como en las Pyramides, el circulo de ſu vaſe AB por el tercio de ſu altura, ya ſean rectos, ò eſcalenos. (393)

DEMONSTRACION.

Imagineſe circunſcripto al circulo de la vaſe del cono el ultimo Poligono, cuyo lado ſea *ac*: del centro *e* tirenſe los radios *ea*, *ec*, por los quales, y el vertice D paſſen planos ſecantes: de lo que reſultarà la Pyramide triangular *acc*D, y el ſector conico *bed*D, cuya razon, ſiendo

por

por ſupoſicion la mas inmediata à la igualdad, aſsi como la del triangulo *eac* al ſector *bed* (279) ſeràn iguales (280): luego la Pyramide al ſector conico ſerà como la vaſe del uno à la vaſe del otro; pero la ſolidèz de la Pyramide es igual al producto del triangulo *aec* por el tercio de la altura (416): luego la ſolidèz del ſector conico ſerà igual al producto del ſector *bed* por el tercio de la miſma altura: por conſiguiente la de todo el cono ADB compueſto de innumerables de eſtos ſectores conicos, ſerà igual al producto del circulo de la vaſe ſuma de los ſectores por el tercio de la miſma altura. La demonſtracion habla con un cylindro recto, el qual es igual à un eſcaleno de la miſma vaſe, y altura (393).

EXEMPLO.

Sea el diametro de la vaſe del cono ==6 varas, por lo que ſu circulo ſerà==

$28°+\frac{2}{7}$ ſea ſu altura$=9°$. por cuyo tercio 3. multiplicando $28°+\frac{2}{7}$. darà 3. $(28+\frac{2}{7})=84°+\frac{6}{7}$ de varas cubicas por la ſolidèz del cono.

COROLARIO I.

420 Son, pues, los conos el tercio de ſus correſpondientes cylindros de la miſma, ò iguales vaſes, y altura.

COROLARIO II.

421 Por conſiguiente, quanto ſe dixo al Art. 415. de los cylindros, ſe debe tener como repetido aqui para los conos.

PROPOSICION XCI.

PROBLEMA. (*Fig.* 178. *y* 179.)

422 *Hallar la ſolidèz de la eſphera.*

RE-

RESOLUCION.

Multipliqueſe ſu circulo maximo por los dos tercios del diametro, y el producto ſerà la ſolidèz.

DEMONSTRACION.

Demonſtrando que el emisferio es igual al producto de ſu circulo maximo por los dos tercios del radio, quedarà probada la reſolucion para la eſphera. Sea para facilitar la explicacion el ſemicirculo AEC perfil, ò corte de un emiſferio, y AF un rectangulo perfil de un cylindro circunſcripto al emisferio; prolongueſe DF, haſta que FG ſea igual al radio=FE=FC, y tireſe GC. Corteſe el cylindro con los planos PV, HO paralelos à la vaſe, de ſuerte, que PH ſea el elemento de la altura; por conſiguiente, aſsi KM en el emisferio, como HN en el cylindro, ſeràn circu-

los (363, 377), y eſte ultimo igual al de la vaſe AC. Tireſe el radio BM, y por quanto en el triangulo rectangulo BLM el circulo de BM es igual à los circulos de BL, y LM (302), ſerà el circulo de LN=BC=BM igual à los circulos de LM, y de BL=NC=NO; pues de la ſimilitud de los triangulos CNO, CFG, reſulta, que aſsi como CF, es=FG, ſerà CN=NO; de ſuerte, que el circulo de NO ſerà igual à la diferencia entre el circulo de LN, y LM; eſto es, igual à la corona repreſentada por MN, que rueda entre el cylindro, y el emisferio. Del miſmo modo ſe probarà, que el circulo de TV, es igual à la corona ST: luego ſi ſe imagina que el triangulo CFG, dà una revolucion al rededor de CF, como exe, formarà un cono GCG (*Fig.* 179.) cuyo elemento VOVO ſerà igual al elemento ſólido PQHKSTMN terminado por las dos coronas (391); y componiendoſe, aſsi el cono, como el hue-

hueco entre el emisferio, y el cylindro de igual numero de elementos, pues tienen la misma altura, serán los sólidos iguales (389) El cono es la tercera parte del cylindro DC, por tener iguales vases, y la misma altura (420); luego el hueco entre el emisferio, y el cylindro, es tambien el tercio del mismo cylindro, por consiguiente el emisferio los dos tercios: Es assi, que el cylindro se halla multiplicando el circulo de su vase AC por toda la altura BE (414); luego el emisferio será igual al producto del circulo maximo AC por los $\frac{2}{3}$ del radio BE, y la esphera por los dos tercios del diametro.

COROLARIO I. (Fig. 180.)

423 *Las esphéras estàn en razon compuesta de las periferias de sus circulos maximos, quarta parte, y dos tercios del diametro*; pues hecha la razon compuesta

de la periferia de AB, que dirèmos P; y de la periferia de CD, que dirèmos *p*; de la quarta parte del diametro AB, y quarta parte del diametro CD; como tambien de los dos tercios del diametro AB, y dos tercios de CD, ſe tendrà $\frac{P}{p} \cdot \frac{\frac{1}{4}AB}{\frac{1}{4}CD} \frac{\frac{2}{3}AB}{\frac{2}{3}CD}$ (150. *Arith.*) pero $P.\frac{1}{4}AB.\frac{2}{3}$ AB es la ſolidèz de una eſphera, y $p.\frac{1}{4}$ CD. $\frac{2}{3}$ CD es la ſolidèz de la otra (422), luego eſtàn en razon compueſta de los terminos expreſſados.

COROLARIO II.

424 *Las eſpheras eſtàn en razon triplicada de ſus diametros*, pues las razones de las eſpheras ſe componen de tres iguales (151. *Arith.*) ſiendo como ſon proporcionales la periferia à la periferia, como la quarta parte, ò dos tercios del diametro, à la quarta parte, ò dos tercios del diametro (290). (*Es la* 18. 12. *Eucl.*)

CO-

COROLARIO III.

425 *Las esphéras asimismo son como los cubos de sus diametros*, pues tambien estàn estos en razon triplicada de sus lados, como paralelepipedos semejantes, que son todos. (405.)

COROLARIO IV.

426 Si el diametro de la esphera es 1, su cubo serà = 1; su circulo maximo serà = $\frac{11}{14}$ (296), que multiplicado por $\frac{2}{3}$ dà por la solidèz de la esphera $\frac{11}{14} \cdot \frac{2}{3} = \frac{11}{21}$: luego el cubo à la esphera serà como 1 à $\frac{11}{21}$, esto es, como 21 à 11: mediante cuya proporcion, dado el diametro de una esphera, se hallarà su solidèz como 21 à 11. asi el cubo del diametro dado à su esphera.

PROPOSICION XCII.

PROBLEMA. (Fig. 181.)

427 *Hallar la ſuperficie de una eſphera.*

RESOLUCION.

Multipliqueſe la periferia de ſu circulo maximo por el diametro, y el producto ſerà la ſuperficie.

DEMONSTRACION.

Supongaſe circunſcripto à la eſphera el ultimo ſólido poſsible, una de cuyas ſuperficies repreſente la *ac*; tirenſe las *ae*, *ce*, è imaginando por ellas planos ſecantes, reſultarà una Pyramide quadrilatera repreſentada por *aec*, y un ſector eſpherico repreſentado por el ſector *bde*; las razones de eſtos ſólidos, aſsi co-

como las de ſus vaſes, ſon las ultimas: luego iguales (280), por conſiguiente ſerà la Pyramide al ſector, como la vaſe de aquella, à la vaſe de eſte; la ſolidèz de la Pyramide es igual al producto de ſu vaſe *ac* por el tercio de la altura, ò radio *ef* (417): luego la ſolidèz del ſector ſerà igual al producto de ſu vaſe *bd* por el tercio del miſmo radio; y por quanto la eſphera ſe compone de innumerables de eſtos ſectores, ſe hallarà tambien la ſolidèz de la eſphera, multiplicando ſu ſuperficie por el tercio de ſu radio, de ſuerte, que el producto de la ſuperficie eſpherica por el tercio del radio, dà lo miſmo que el producto de ſu circulo maximo por los $\frac{2}{3}$ del diametro (422): por conſiguiente ſeràn proporcionales $\frac{1}{3}$ del radio à $\frac{2}{3}$ del diametro, ò $\frac{4}{3}$ del radio, como el circulo maximo à la ſuperficie eſpherica (132. *Arith.*); y aſsi como $\frac{1}{3}$ es la quarta parte de $\frac{4}{3}$: el circulo maximo ſerà la quarta parte de la ſu-

per-

perficie eſpherica, pero la ſuperficie del circulo, es igual al producto de ſu periferia por la quarta parte del diametro (295); luego la ſuperficie eſpherica ſe hallarà multiplicando la miſma periferia por todo el diametro.

COROLARIO I.

428 *La eſphera*, como en eſta demonſtracion claramente ſe expreſſa, *es igual à un cono, cuya vaſe ſea la ſuperficie eſpherica, y ſu altura el radio* (419).

COROLARIO II.

429 Aſsimiſmo que *qualquier ſector eſpherico es igual à un cono, cuya vaſe ſea la ſuperficie eſpherica, y ſu altura el radio.*

CO-

COROLARIO III.

430 *Los ſectores eſphericos ſon entre sì como las ſuperficies eſphericas de ſus baſes.*

COROLARIO IV.

431 Igualmente ſe infiere de la demonſtracion, que *la ſuperficie de una eſphera es quadrupla de ſu circulo maximo, y la del emisferio dupla.*

PROPOSICION XCIII.

PROBLEMA. (Fig. 182.)

432 *Hallar la ſolidèz de qualquier cuerpo regular.*

RESOLUCION, Y DEMONSTRACIÒN.

Deſde el centro D de la eſphera circunſcriptible al cuerpo regular (384), ſu-

ſupongaſe baxada la perpendicular DB ſobre una de las ſuperficies AC, y paſſando planos por el centro, y angulos del cuerpo regular, reſultaràn tantas Pyramides iguales, como vaſes tenga ſu ſuperficie: luego multiplicando qualquiera de ellas AC por el tercio de la altura DB, ſe tendrà una Pyramide (417), que multiplicada por el numero de ellas, darà la ſolidèz del cuerpo regular.

PRO-

PROPOSICION XCIV.

PROBLEMA.

433 *Hallar la ſolidèz de qualquier cuerpo irregular.*

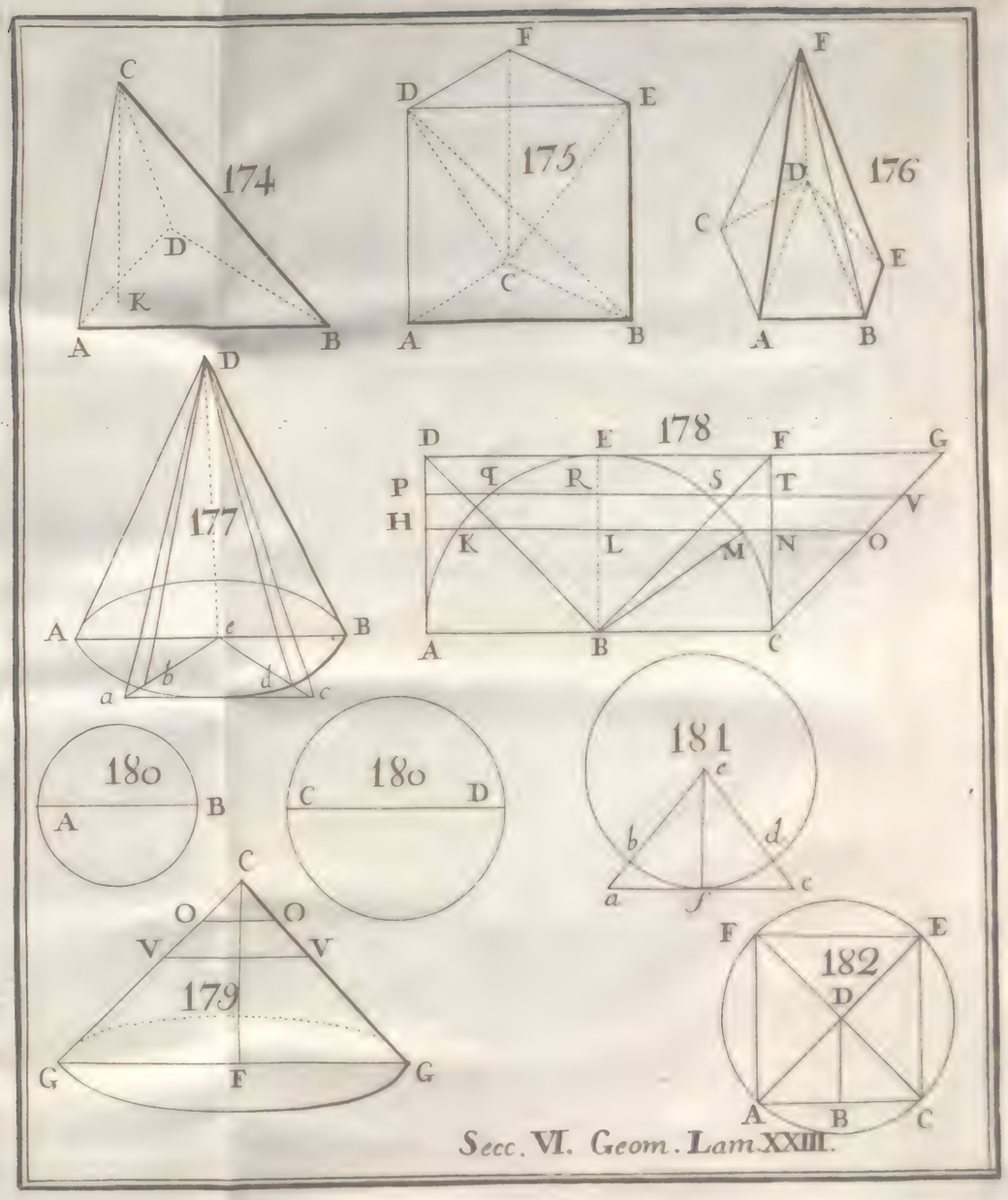
RESOLUCION, Y DEMONSTRACION.

Examineſe ſi por medio de varias ſecciones, que ſe conſideren en el ſólido propueſto, puede reducirſe eſte à priſmas, paralelepipedos, cylindros, pyramides, ò conos, compenſando lo que por una parte à eſte efecto ſe tome de mas, con lo que por otra parte ſe tome de menos; y hallando la ſolidèz de cada uno de eſtos cuerpos por las reglas dadas, ſumandolos todos, ſe tendrà el ſólido propueſto.

SCHOLIO.

434 Siendo el cuerpo de una figura muy irregular, è irreducible à sólidos conocidos, por exemplo una Estatua, Espadin, &c. serà mejor expediente para medirlo, el ponerlo dentro de una Caxa paralelepipeda, ù otra figura conocida: y llenandola de agua, ò arena, se notaràn los pies cubicos, que en ella quepan, los quales restados de los pies cubicos de su capacidad considerada vacìa, la diferencia seràn los pies cubicos, ò extension, que la Estatua ocupa.

FIN DE LA GEOMETRIA.



Secc. VI. Geom. Lam XXIII.

ERRATAS.

FOL. 44. en el texto, linea 3. *ub*, leaſe *bc*.
Fol. 48. lin. 2. C. leaſe *c*.
Fol. 56. en el texto, lin. 2. CD, leaſe CB.
Fol. 57. lin. 2. cita 29, leaſe 79.
Fol. 64. Fig. 46, leaſe 47.
Fol. 82. lin. 1. CG, corrijaſe N.
Fol. 141. Fig. 82, corrijaſe 88.
Fol. 143. cita 79, corrijaſe 93: linea 17, cita 79, leaſe 62.
Deſde el fol. 154, haſta 160. por Fig. 98. corrijaſe 97: por 99, corrijaſe 98; y por 100, corrijaſe 99.
Fol. 157. lin. 1. CD, corrijaſe *c*D.
Fol. 159. lin. 5. *ba*=*ac*, corrijaſe *ba*: *ac*.
Fol. 159. art. 230. lin. 4. CB, leaſe AB; *cb*, leaſe *ab*.
Fol. 179. lin. 7. AC, leaſe CK; tambien $\frac{1}{2}$ EF. EG, corrijaſe $\frac{1}{2}$ DE. FH. Art. 249. Fig. 11. corrijaſe 111.

En los Articulos 294, 295, 298, y 299, ſe cita una miſma Figura 132, con cuyo nombre eſtàn tres inmediatas en la lamina; ſi no ſatisfaciere la una, ſatisfarà la otra.

A 086-B/208
UNIVERSIDAD DE SEVILLA
Biblioteca
UNIVERSIDAD D SEVILLA
600705281
i 26494218

86.

GEOME
TRIA

T. II.

colorchecker CLASSIC

calibrite

mm